Zeitabhängige (nicht-autonome) ODEs

$$(*) \begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad f: G \to \mathbb{R}^n, \quad G \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \text{ gebiet}, \quad (t_0, x_0) \in G$$

Satz von Picard-Lindelöf (*)

Sei f st. und lok. Lip. in x, d.h. $\forall (t_1, x_1) \in G$ $\exists$ Umg $U \subset G$ von (t_1, x_1) $\exists L > 0$ $\forall (t,x), (t,y) \in U$:

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| \leq L \, \|x - y\|$$

Dann ex. $\delta > 0$ und eine Lsg $\underbrace{\binom{t}{x} : (-\delta, \delta) \to G}_{x : (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}^n}$ des AWP (*). ~~mit x(t) =~~

$\binom{t}{x(t)} \in G \ \forall t \in (-\delta, \delta)$

Die Lsg ist eind. im Sinne wie beim "autonomen" SPL.

Korollar Wenn f global def., $f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ und global Lip. in x, d.h. $\forall t \in \mathbb{R}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| \leq L \, \|x - y\|,$$

dann ex. $\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ eine (eind.) globale Lsg. $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ von (*).