Kap. 9: Lineare DGLen

Def 9.1, 9.15 Eine DGL in 1 Variablen x heißt *linear*, wenn sie von der Form

$$\frac{d^r x}{dt^r} = \sum_{k=0}^{r-1} a_k(t) \frac{d^k x}{dt^k} + b(t) \qquad (1)$$

ist mit geg. Koeffizientenfunktionen $a_k : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall ($I = \mathbb{R}$ mögl.) und geg. $b : I \to \mathbb{R}$. Die DGL heißt *homogen*, falls $b(t) = 0 \ \forall t \in I$, sonst *inhomogen*; b heißt die *Inhomogenität*.

Bsp.

$\ddot{x} = \dot{x}^2$ nicht-linear

$\ddot{x} = -\omega^2 x$ (harmonischer Oszillator) linear, $\omega = \text{const}$, $a_1(t) = 0$, $a_0(t) = -\omega^2$ (konst. Koeffizienten, autonom) homogen

$\ddot{x} = \dot{x}\, x$ nicht linear

$\ddot{x} = -\sin x$ nicht linear

$\ddot{x} = -(\sin t)\, x$ linear, homogen $a_1(t) = 0$, $a_0(t) = -\sin t$

$\ddot{x} = -\sin t$ linear, inhomogen $a_1(t) = 0$, $a_0(t) = 0$, $b(t) = -\sin t$.

Def 9.1 Eine DGL in n Variablen $(x_1 .. x_n)$ heißt **linear**, wenn sie von der Form

$$\boxed{\frac{d^r \underline{x}}{dt^r} = \sum_{k=0}^{r-1} A_k(t) \frac{d^k \underline{x}}{dt^k} + \underline{b}(t) \qquad (2)}$$

ist mit geg. $A_k : I \to \underbrace{M_n(\mathbb{R})}_{n \times n}$ Koeffizientenmatrizen

und geg. Inhomogenität $\underline{b} : I \to \mathbb{R}^n$;

homogen, wenn $\underline{b}(t) = 0 \ \forall t \in I$.

Bsp grad $r = 1$: $\dot{\underline{x}} = A(t)\underline{x} + \underline{b}(t)$

$f(t, \underline{x}) = A(t)\underline{x} + \underline{b}(t)$ affin-linear

$(\dot{\underline{x}} = f(t, \underline{x}))$

Bem Reduktion grad $r \to$ grad 1 bleibt linear

Bericht (Bew später) Satz 9.3

Seien $A_k : I \to M_n(\mathbb{R})$ $(k = 0, .., r-1)$ und $\underline{b} : I \to \mathbb{R}$ st. Dann ex. $\forall t_0 \in I \ \forall \underline{x}_{0,k} \in \mathbb{R}^n$ eine eind. max. Lsg. von (2) mit $\frac{d^k \underline{x}}{dt^k}(t_0) = \underline{x}_{0,k}$ $(k = 0, .., r-1)$ und ist auf ganz I definiert (globale Existenz).

Satz 9.5 (a)

Seien $\underline{b} = 0$, $A_k : I \to M_n(\mathbb{R})$ st. $(k = 0, \dots, r-1)$

$L_h :=$ Menge aller max. Lsgen von (2)

$$= \left\{ \underline{x} \in C^r(I, \mathbb{R}^n) \,\middle|\, \left(\frac{d}{dt}\right)^r \underline{x} = \sum_{k=0}^{r-1} A_k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \underline{x} \quad \forall t \in I \right\}$$

Dann ist L_h nr-dim Unterraum von $C^r(I, \mathbb{R}^n)$. ("Superpositionsprinzip")

Bew Seien $\underline{x}, \underline{\tilde{x}} \in L_h$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^r (\underline{x} + \underline{\tilde{x}}) = \frac{d^r \underline{x}}{dt^r} + \frac{d^r \underline{\tilde{x}}}{dt^r}$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} A_k(t) \frac{d^k \underline{x}}{dt^k} + \sum_{k=0}^{r-1} A_k(t) \frac{d^k \underline{\tilde{x}}}{dt^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} A_k(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^k (\underline{x} + \underline{\tilde{x}})$$ also $\underline{x} + \underline{\tilde{x}} \in L_h$

und $$\left(\frac{d}{dt}\right)^r (\lambda \underline{x}) = \lambda \left(\frac{d}{dt}\right)^r \underline{x}$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{r-1} A_k(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^k \underline{x} = \sum_{k=0}^{r-1} A_k(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^k (\lambda \underline{x}).$$

also $\lambda \underline{x} \in L_h$.

Dim: Wähle $t_0 \in I$. Die Abb.

$$L_h \to (\mathbb{R}^n)^r, \quad \underline{x} \longmapsto \left(\underline{x}(t_0), \dot{\underline{x}}(t_0), \dots, \left(\frac{d}{dt}\right)^{r-1} \underline{x}(t_0)\right)$$

ist linear und bij (Satz 9.3)

$\Rightarrow \dim L_h = \dim (\mathbb{R}^n)^r = nr$ □

<u>Bem</u> • Brauchen nur nr lin. unabh. spezielle Lsgen ("Fundamentalsystem", Def. 9.7)

• Bei konst. Koeff.: <u>Exponentialansatz</u>

d.h. für $n=1$: Probierfkt $x(t) = e^{\lambda t}$

einsetzen in DGL $\Rightarrow$ mögl. Werte für $\lambda \in \mathbb{C}$

(NST von $\sum_{k=0}^{r-1} a_k \lambda^k + \lambda^r$)

liefert mehrere spez. Lsgen

ÜA: für mehrfache NST auch $x(t) = t^j e^{\lambda t}$, $0 \le j < r$

lin. unabh. $\rightsquigarrow$ Fundamentalsystem

(Frage: reelle Lsgen?)

Für $n > 1$: Probierfkt $\underline{x}(t) = \underline{x}_0 e^{\lambda t}$

einsetzen in DGL $\rightsquigarrow$ mögl. Werte für $(\lambda, \underline{x}_0) \in \mathbb{C}^{n+1}$

Frage: liefert das genug lin. unabh. Lsgen?

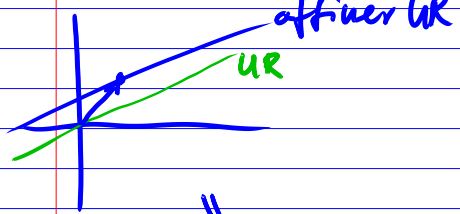
Satz 9.8(a) Seien $\underline{b}: I \to \mathbb{R}^n$ st.,

$A_k : I \to M_n(\mathbb{R})$ st. $(k=0, \dots, r-1)$

$L_i :=$ Menge aller Lsgen von (2)

$$= \left\{ \underline{x} \in C^r(I, \mathbb{R}^n) \;\middle|\; \left(\frac{d}{dt}\right)^r \underline{x} = \sum_{k=0}^{r-1} A_k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \underline{x} + \underline{b} \;\; \forall t \in I \right\}$$

Dann ist L_i nr-dim. affiner Unterraum von $C^r(I, \mathbb{R}^n)$, tatsächlich



$L_i = \tilde{\underline{x}} + L_h$ für $\tilde{\underline{x}} \in L_i$.

"$x_{\text{allg. inhom}} = x_{\text{spez. inhom}} + x_{\text{allg. hom}}$"

Bew Sei $\tilde{\underline{x}} \in L_i$, $\underline{x} \in L_h$. Dann ist $\tilde{\underline{x}} + \underline{x} \in L_i$, denn $\left(\frac{d}{dt}\right)^r (\tilde{\underline{x}} + \underline{x}) =$

$$\sum A_k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \tilde{\underline{x}} + \underline{b} + \sum A_k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \underline{x}$$

Also $\tilde{\underline{x}} + \underline{x} \in L_i$, also $\tilde{\underline{x}} + L_h \subset L_i$

Sei nun $\underline{x} \in L_i$ bel., dann ist $\underline{x} - \tilde{\underline{x}} \in L_h$, denn $\left(\frac{d}{dt}\right)^r (\underline{x} - \tilde{\underline{x}}) = \sum A_k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \underline{x} + \underline{b}$

$$- \sum A_k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \tilde{\underline{x}} - \underline{b}$$

also $\tilde{\underline{x}} + L_h \supset L_i$. $\square$