Matrix-Exponential

$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$

ges. $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, geg. $A \in M_n(\mathbb{R})$

Falls $n=1$: $\dot{x} = ax$ hat Lsg

$$x(t) = e^{at} x_0$$

allg. n:

<u>Beh 1</u> Die Lsg. des AWPs $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$, $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ ist $\underline{x}(t) = e^{At}\,\underline{x}_0$.

<u>Def</u> $\forall B \in M_n(\mathbb{C})$

$$e^B := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k .$$

<u>Bem</u> $e^{0_n} = E_n$.

<u>Beh 2</u> Die Reihe konv. (sogar abs.) $\forall B \in M_n(\mathbb{C})$.

<u>Bew</u> z.z. $\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{k!} B^k \right\| < \infty$.

$\|C\|$ = Operatornorm auf $M_n(\mathbb{C})$

= kleinste Lip.-Konst.

$$= \sup_{v\neq 0} \frac{\|Cv\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} \|Cv\|$$

$= \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ EW}\}$ falls C orthonormal diag.bar

Regel $\|Cv\| \le \|C\|\,\|v\|$

$\|CD\| \le \|C\|\,\|D\|$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\|\frac{1}{k!}B^k\right\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{\|B^k\|}_{\le \|B\|^k}$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\|B\|^k = e^{\|B\|} < \infty. \qquad \square$$

Beh 3 Funktionalgleichung

Seien $A, B \in M_n(\mathbb{C})$

Wenn $AB = BA$, dann $e^{A+B} = e^A e^B$

Bew $e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(A+B)^k$

$$(A+B)^k = (A+B)(A+B)\cdots(A+B)$$

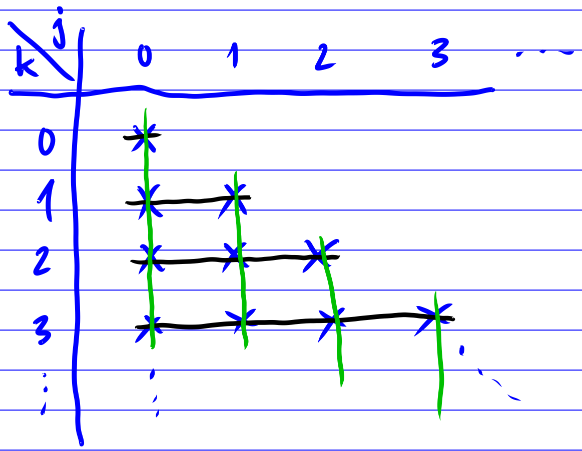
$$\begin{aligned}
&= A^k + BA^{k-1} + ABA^{k-2} + \dots \\
&\quad + A^{k-1}B + BBA^{k-2} + \\
&\quad + BABA^{k-3} + \dots + BA^{k-2}B + \\
&\quad + ABBA^{k-3} + ABABA^{k-4} + \dots \\
&\quad \dots + B^k
\end{aligned}$$

$AB = BA$

$$= A^k + kA^{k-1}B + \binom{k}{2}A^{k-2}B^2 + \dots$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \underbrace{\binom{k}{j}}_{k!/j!(k-j)!} A^{k-j}B^j$$

Also $$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!(k-j)!} A^{k-j}B^j .$$



Umordnen erlaubt?

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \left\| \frac{1}{j!(k-j)!} A^{k-j} B^{j} \right\|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!(k-j)!} \|A\|^{k-j} \|B\|^{j}}_{= \frac{1}{k!}\left(\|A\|+\|B\|\right)^{k}} = e^{\|A\|+\|B\|} < \infty$$

$\Downarrow$

Ja!

Also $\underline{\underline{e^{A+B}}} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{j!(k-j)!} A^{k-j} B^{j}$

$$\overset{m=k-j}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{j!\, m!} A^{m} B^{j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \Big(\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^{m}}_{e^{A}} \Big) B^{j}$$

$$= e^{A} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} B^{j} = \underline{\underline{e^{A} e^{B}}}. \qquad \square$$

Beh 4 $t \mapsto e^{At}$, $\mathbb{R} \to M_n(\mathbb{C})$

ist diffbar, und

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$$

Bew Wenn man gliedweise differenzieren darf, dann

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{(At)^k}_{A^k t^k} = \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k k t^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} A^k t^{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{A^{k+1}}_{A A^k = A^k A} t^k = A e^{At} = e^{At} A$$

Ana 1 Satz 7.35: Man darf, wenn

1) die Reihe punktweise konv und

2) die gliedw. differenzierte Reihe glm. konv.

ad 1) Beh 2

ad 2) Wir zeigen das auf jedem kompakten Intervall $K \subset \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{k!} A^{k+1} t^k \right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^{k+1} \underbrace{|t|^k}$$

$$\le \left(\sup_{t\in K} |t|\right)^k =: T^k$$

$$= \underbrace{\|A\| e^{T\|A\|}}_{\text{unabh. von } t} < \infty$$

daher $\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^{k+1} t^k - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^{k+1} t^k \right\|$

$$= \left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^{k+1} t^k \right\| \le \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^{k+1} T^k \xrightarrow{m\to\infty} 0$$

weil $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^{k+1} T^k$ konv.

Fazit: Man darf auf K.
Jedes $t \in \mathbb{R}$ liegt in einem K.

$\Rightarrow$ Man darf bei jedem t. $\square$

Bem 1 $\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}_0$ ist Lsg. von $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$, $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$.

Bew $\underline{x}(0) = E_n \underline{x}_0 = \underline{x}_0$

$$\dot{\underline{x}} = \frac{d}{dt}\left(e^{At}\right)\underline{x}_0 = A e^{At} \underline{x}_0 = A\underline{x}. \quad \square$$