Fundamentalsystem

Def Fund. system = Basis von L_h

Satz 9.5(b) Betrachte $\underline{\dot{x}} = A(t)\,\underline{x}$ (1)

mit $A: I \to M(n,\mathbb{R})$ st., $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $t_0 \in I$. Äq. sind:

(i) $\{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m\}$ ist lin. unabh. in L_h

(ii) $\forall t \in I: \{\underline{x}_1(t), \dots, \underline{x}_m(t)\}$ lin. unabh. in $\mathbb{R}^n$

(iii) $\{\underline{x}_1(t_0), \dots, \underline{x}_m(t_0)\}$ lin. unabh. in $\mathbb{R}^n$

Bew

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\bar{t} \in I$ bel.

z.z. Wenn $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \underline{x}_j(\bar{t}) = \underline{0} \in \mathbb{R}^n$, dann $\lambda_j = 0 \;\forall j$.

Setze $\underline{x}(t) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \underline{x}_j(t) \quad \forall t \in I$

- Linearität: $\underline{x}: I \to \mathbb{R}^n$ ist Lsg. von (1)
- $\underline{x}(\bar{t}) = \underline{0}$
- Eind. der Lsg., AZ $\bar{t}$ $\Rightarrow$ $\underline{x}(t) = \underline{0} \quad \forall t \in I$
- Also $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \underline{x}_j = 0$ in $C^1(I, \mathbb{R}^n) \overset{(i)}{\Longrightarrow} \lambda_j = 0 \;\forall j$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) klar

(iii) $\Rightarrow$ (i): Z.z.: Wenn $\sum \lambda_j \underline{x}_j = 0$

in L_h, dann $\lambda_j = 0 \ \forall j$.

Dann insbes. $\sum \lambda_j \underline{x}_j(t_0) = \underline{0}$

$\overset{(iii)}{\Longrightarrow} \lambda_j = 0 \ \forall j$. □

Bem Entspr. für höhere Ordg:

$$\boxed{\frac{d^r \underline{x}}{dt^r} = \sum_{k=0}^{r-1} A_k(t) \frac{d^k \underline{x}}{dt^k} \qquad (2)}$$

Für $\underline{x} \in L_h$ und $t \in I$ definiere

$$\alpha(t) := \begin{pmatrix} \underline{x}(t) \\ \dot{\underline{x}}(t) \\ \vdots \\ \frac{d^{r-1}\underline{x}(t)}{dt^{r-1}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nr}$$

= "Phasenpunkt" zu t

$\alpha(t_0)$ = Anfangsdaten

Bem 'Äq. sind: $\subset C^r(I, \mathbb{R}^n)$

(i) $\{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m\}$ lin unabh. in L_h

(ii) $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ lin. unabh in $C^1(I, \mathbb{R}^{nr})$

(iii) $\forall t \in I$: $\{\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t)\}$ lin. unabh. in $\mathbb{R}^{nr}$

(iv) $\{\alpha_1(t_0), \dots, \alpha_m(t_0)\}$ lin unabh. in $\mathbb{R}^{nr}$

Bew

(i) $\Rightarrow$ (ii): $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_j = 0$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \underline{x}_j = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0 \ \forall j.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Wir zeigen

non-(i) $\Rightarrow$ non-(ii)

oBdA $\underline{x}_1 = \sum_{j=2}^{m} c_j \underline{x}_j$

$$\Rightarrow \dot{\underline{x}}_1 = \sum_{j=2}^{m} c_j \dot{\underline{x}}_j \qquad \text{etc.}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \sum_{j=2}^{m} c_j \alpha_j \Rightarrow \text{non-(ii)}.$$

Rest: Satz 9.5(b) $\square$

Def Die Wronski-Determinante

von $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{nr} \in C^r(I, \mathbb{R}^n)$ bei $t \in I$

ist

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} \underline{x}_1(t) & \cdots & \underline{x}_{nr}(t) \\ \dot{\underline{x}}_1(t) & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d^{r-1}\underline{x}_1(t)}{dt^{r-1}} & \cdots & \frac{d^{r-1}\underline{x}_{nr}(t)}{dt^{r-1}} \end{pmatrix}$$

$$= \det\left(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_{nr}(t)\right)$$

<u>Korollar</u> Seien $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{nr} \in L_h$ für (2)

Äq sind:

(i) $\{\underline{x}_1 \ldots \underline{x}_{nr}\}$ ist Fundamentalsystem

(ii) $W(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

(iii) $W(t) \neq 0$ für ein $t \in I$.