Dyson-Reihe

Bem 9.6 Betrachte $\underline{\dot{x}} = A(t)\underline{x}$ (1)

mit $A: I \to M(n, \mathbb{R})$ st., $t_0 \in I$

Flussabb. $\Phi(t): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\Phi(t)(\underline{x}(t_0)) = \underline{x}(t)$ $\forall$ max. Lsg. $\underline{x}$

ÜA: $\Phi(t)$ ist linear ("Propagator")

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = A(t)\,\Phi(t)$$

$$\Phi(t_0) = E_n$$

Die Spalten von $\Phi(t)$ bilden Fund.syst.
(Lsg.en mit $\underline{x}_0 =$ kanonische Basisvektoren)

Bsp 9.12 autonom $A(t) \equiv A$, $I = \mathbb{R}$

$\Rightarrow \Phi(t) = e^{A(t-t_0)}$

zurück zum allg. $A(t)$

Bem 9.13

heuristisches Vorgehen zum expliziten Lösen von $\underline{\dot{x}} = A(t)\underline{x}$:

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

$$\Phi(t_0) = E_n = 1$$

$$\underline{x}(t_0 + dt) = \underline{x}_0 + A(t_0)\,\underline{x}_0\, dt$$

$$\Phi(t_0 + dt) = 1 + A(t_0)\, dt$$

$$\underline{x}(t_0 + 2dt) = \left(1 + A(t_0 + dt)\, dt\right)\underline{x}(t_0 + dt)$$

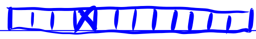
$$\Phi(t_0 + 2dt) = \left(1 + A(t_0 + dt)\, dt\right)\left(1 + A(t_0)\, dt\right)$$

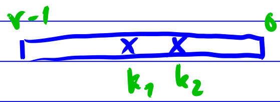
$$\vdots \qquad \left[A_k := A(\underbrace{t_0 + k\,dt}_{\tau})\right]$$

$$\Phi(\underbrace{t_0 + r\,dt}_{t}) = \prod_{k=r-1}^{0}\left(1 + A_k\, dt\right)$$

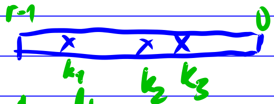
$$= \left(1 + A_{r-1}\, dt\right) \cdots\cdots \left(1 + A_0\, dt\right)$$

$$= 1 + \sum_{k=r-1}^{0} A_k\, dt$$





$$+ \sum_{k_1=r-1}^{0} \sum_{k_2=k_1-1}^{0} A_{k_1} dt\, A_{k_2} dt$$



$$+ \sum_{k_1=r-1}^{0} \sum_{k_2=k_1-1}^{0} \sum_{k_3=k_2-1}^{0} A_{k_1} dt\, A_{k_2} dt\, A_{k_3} dt$$

$$+ \ldots$$

$$\Phi(t) = 1 + \int_{t_0}^{t} d\tau\, A(\tau) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \quad A(\tau_1)\, A(\tau_2)$$

$$+ \ldots + \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{m-1}} d\tau_m \; A(\tau_1)\, A(\tau_2) \cdots A(\tau_m)$$

$$+ \ldots$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{m-1}} d\tau_m \; A(\tau_1) \cdots A(\tau_m)$$

Dyson-Reihe

rigoros: ÜA

Freeman Dyson (1923-2020)

Bem 9.14

Ergebnisse für lineare DGL für $\underline{x}: I \to \mathbb{R}^n$ gelten auch für $\underline{x}: I \to \mathbb{C}^n$.