Variation der Konstanten

Methode zum expliziten Lösen von inhom. lin. DGLen.

Wir betrachten $r=1$,

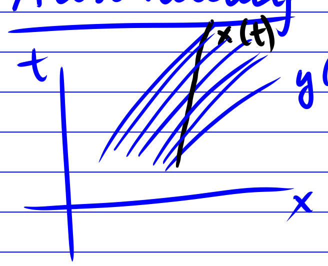
$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A(t)\,\underline{x} + \underline{b}(t) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases} \qquad (1)$$

und haben die hom. Gl.

$$\dot{\underline{y}} = A(t)\,\underline{y} \qquad (2)$$

schon gelöst und kennen den Propagator $\Phi(t)$.

Anschauung: x wechselt ständig von einer Bahn y auf eine andere



$\underline{y}(t) = \Phi(t)\,\underline{c}$

$\underline{c}$ = Vektor der Koeffizienten für die Spalten von $\Phi(t)$.

Schreibe Lsg von (1) als

$$\underline{x}(t) = \Phi(t)\,\underline{c}(t)$$

$$A(t)\underline{x}+\underline{b} = \dot{\underline{x}}(t) = \dot{\underline{\Phi}}(t)\,\underline{c}(t) + \underline{\Phi}(t)\,\dot{\underline{c}}(t)$$

$$= A(t)\underbrace{\underline{\Phi}(t)\,\underline{c}(t)}_{\underline{x}(t)} + \underline{\Phi}(t)\,\dot{\underline{c}}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{b}(t) = \underline{\Phi}(t)\,\dot{\underline{c}}(t)$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{c}}(t) = \underline{\Phi}(t)^{-1}\,\underline{b}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{c}(t) = \underline{c}(t_0) + \int_{t_0}^{t} dt'\,\underline{\Phi}(t')^{-1}\,\underline{b}(t')$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t)\left(\overset{\underline{x}_0}{\cancel{\underline{c}(t_0)}} + \int_{t_0}^{t} dt'\,\underline{\Phi}(t')^{-1}\,\underline{b}(t')\right)}$$

Variation-der-Konstanten-Formel

Bsp 9.11 $n=1$
$$\begin{cases} \dot{x} = 2t\,x + t^3 & (3) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$t_0=0$, $a(t)=2t$, $b(t)=t^3$, hom. gl.

$$\dot{y} = 2t\,y \qquad (4)$$

($2t$ ← $a(t)$)

▷ Lösc (4). 2 Wege:

1) Sep. der Var.
$$\underbrace{\int_{y_0}^{y(T)} \frac{dy}{y}}_{\ln \frac{y(T)}{y_0}} = \int_0^T 2t\,dt = \int_0^T a(t)\,dt$$

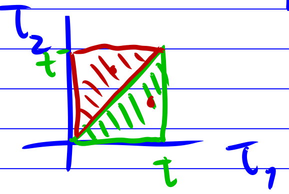
$$\Rightarrow \quad y(T) = y_0 \, e^{\int_0^T a(t)\,dt}$$

2) Dyson-Reihe:

$$\Phi(t) = 1 + \int_0^t a(\tau_1)\,d\tau_1 + $$

$$+ \underbrace{\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \; a(\tau_1)\,a(\tau_2)} + $$

$$\iint_{\{(\tau_1,\tau_2)\in[0,t]^2 \,|\, \tau_1 > \tau_2\}} d\tau_1\,d\tau_2 \; \underbrace{a(\tau_1)\,a(\tau_2)}_{=a(\tau_2)\,a(\tau_1)}$$



$$= \frac{1}{2} \iint_{[0,t]^2} d\tau_1\,d\tau_2 \; a(\tau_1)\,a(\tau_2)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^t d\tau_1 \; a(\tau_1) \right)^2$$

$$+ \ldots + \underbrace{\int \cdots \int_{\{(\tau_1 \ldots \tau_m)\in[0,t]^m \,|\, \tau_1 > \tau_2 > \ldots > \tau_m\}} d\tau_1 \cdots d\tau_m \; a(\tau_1) \cdots a(\tau_m)} + \ldots$$

$$= \frac{1}{m!} \underbrace{\iint_{[0,t]^m} d\tau_1 \cdots d\tau_m \; a(\tau_1) \cdots a(\tau_m)}_{\left(\int_0^t a(\tau)\,d\tau\right)^m}$$

$$= 1 + \int_0^t a(\tau_1)\,d\tau_1 + \frac{1}{2}\left(\int_0^t a(\tau)\,d\tau\right)^2$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!}\left(\int_0^t a(\tau)\,d\tau\right)^n + \ldots$$

$$= e^{\int_0^t a(\tau)\,d\tau} .$$

Hier $a(t) = 2t \Rightarrow \int_0^t a(\tau)\,d\tau = t^2$, d.h.

$$\Phi(t) = e^{t^2}$$

▷ Var. der Konst.:

$$x(t) = e^{t^2}\left(x_0 + \int_0^t dt'\; e^{-t'^2}\, t'^3\right)$$

$$\int_0^t ds\; e^{-s^2} s^3 \underset{\substack{u = s^2 \\ du = 2s\,ds}}{=} \frac{1}{2}\int_0^{t^2} du\; e^{-u}\, u$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{-u}\,u\right]_0^{t^2} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{t^2} du\;(-e^{-u})}_{\left[e^{-u}\right]_0^{t^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t^2}t^2 - \frac{1}{2}e^{-t^2} + \frac{1}{2}$$

Also $x(t) = e^{t^2}x_0 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{t^2}.$