Globale Existenz

genügt für Ordg.: 1

Satz 9.3 Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall

$\underline{A} : I \to M(n, \mathbb{R})$ st.,

$\underline{b} : I \to \mathbb{R}^n$ st.

Dann ex. zu jedem $t_0 \in I$ und $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ eine (eind., max.) Lsg $\underline{x} : I \to \mathbb{R}^n$ von

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A(t)\,\underline{x} + \underline{b}(t) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases}$$

Bew nicht-autonomer Satz von Picard-Lindelöf

$\Rightarrow \forall t_0 \in I \ \forall \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n \ \exists_1$ max. Lsg.

$\underline{x} : J \to \mathbb{R}^n$, $J =: (s_-, s_+) \subset I =: (t_-, t_+)$

Zu zeigen: $s_+ = t_+$ (und $s_- = t_-$)

Wäre $s_+ < t_+$, dann müsste nach Satz 8.22 $\underline{x}$ jedes Kompaktum in $\mathbb{R}^n$ verlassen, also $\|\underline{x}(t)\| \xrightarrow{t \to s_+} \infty$.

Wir zeigen: $\|\underline{x}(t)\|$ beschr.

Setze $L := \max\{ \|A(t)\| \mid t_0 \le t \le s_+ \}$

$M := \max\{ \|\underline{b}(t)\| \mid t_0 \le t \le s_+ \}$

$u(t) := \|\underline{x}(t)\|$

$u : [t_0, s_+) \longrightarrow [0, \infty)$ st.

Dann $u(t) = \left\| \underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} dt' \, \dot{\underline{x}}(t') \right\|$

$$\le \|\underline{x}_0\| + \int_{t_0}^{t} dt' \, \underbrace{\|\dot{\underline{x}}(t')\|}_{\le \|A(t')\underline{x}(t')\| + \|\underline{b}(t')\|}$$

$$\le \underbrace{u(t_0) + \int_{t_0}^{t} dt' \, \|\underline{b}(t')\|} + \int_{t_0}^{t} dt' \, \underbrace{\|A(t')\|}_{\le L} \, \underbrace{\|\underline{x}(t')\|}_{u(t')}$$

$$\le C + L \int_{t_0}^{t} dt' \, u(t')$$

Lemma von Grönwall 9.4

Sei $a < b$, $u : [a,b] \longrightarrow [0, \infty)$ st.

Wenn $\exists L, C \ge 0 \ \forall t \in [a,b]: \ u(t) \le C + L \int_a^t u(s) \, ds$

dann $u(t) \le C e^{L(t-a)} \quad \forall t \in [a,b]$.

Insbes. wenn $\exists C, L \geq 0\ \forall t \in [a,b]$:

$$\dot{u} \leq L u \quad \text{und} \quad u(a) = C,$$

dann $u(t) \leq C\, e^{L(t-a)} \quad \forall t \in [a,b]$.

<u>Fortsetzung Bew. 9.3</u>

Also $u(t) \leq C\, e^{L(t-t_0)}$

$$\leq C\, e^{L(s_+ - t_0)}.$$

$\forall t_0 \leq t \leq s_+$, also $t \mapsto \|\underline{x}(t)\|$ beschr. auf $[t_0, s_+)$. $\square$

<u>Beweis des Lemmas von Grönwall</u>

<u>Falls $C > 0$:</u> Setze $U : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$

$$U(t) := C + L \int_a^t dt'\, u(t')$$

U ist C^1, $\dot{U} = L u(t) \geq 0$

$\Rightarrow$ monoton steigend

$U(a) = C > 0 \Rightarrow U(t) \geq C \quad \forall t \in [a,b]$.

Daher

$$\frac{d}{dt} \ln U(t) = \frac{\dot{U}(t)}{U(t)} = \frac{L u(t)}{U(t)} \underset{u \leq U}{\leq} L$$

Also

$$\ln U(t) - \ln C = \int_a^t ds \frac{d}{ds} \ln U(s) \leq L \int_a^t ds = L(t-a)$$

$U(t) \le C\, e^{L(t-a)}$

$\Rightarrow\ u(t) \le U(t) \le C\, e^{L(t-a)}$.

Falls $C=0$: folgt immer noch

$u(t) \le \tilde{C}\, e^{L(t-a)} \quad \forall\, \tilde{C} > 0$

also $u(t) = 0 \quad \forall t \in [a,b]$ $\square$