Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2020
5. November 2020

Analysis 2

Übungsblatt 2

Aufgabe 6: Konturdiagramme (20 Punkte)
Bestimmen Sie, welche Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in (a)–(e) zu welchem Bild (I)–(V) gehört. (Keine Begründung erforderlich.)

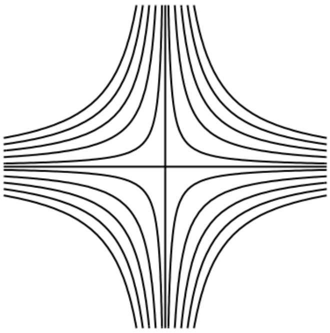
(a) $f(x,y) = xy$

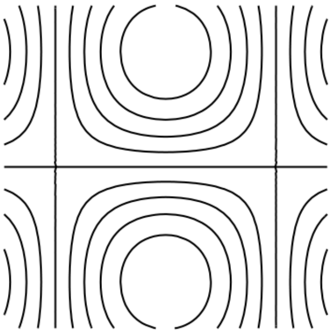
(b) $f(x,y) = e^x e^y$

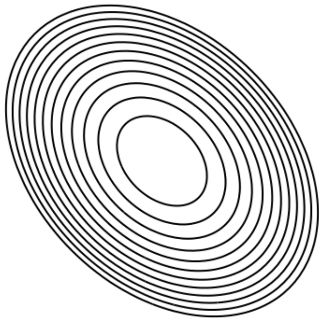
(c) $f(x,y) = \cos x \sin y$

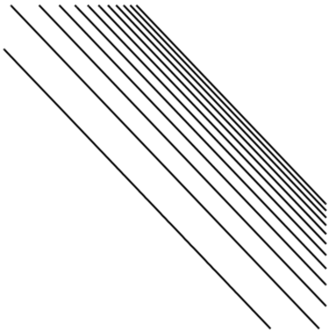
(d) $f(x,y) = (2 + \cos x)y$

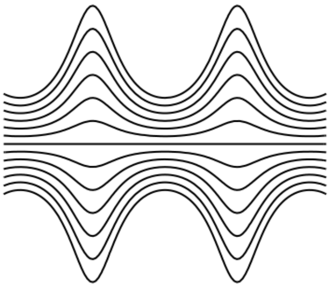
(e) $f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 + 2xy$


(I)


(II)


(III)


(IV)


(V)

Aufgabe 7: Abstand von Mengen (20 Punkte)
Bestimmen Sie mit Beweis den Abstand der beiden Mengen $A = \{(2,1,1)\}$ und $B = \{(1,t,t^2) | t \in \mathbb{R}\}$ im $\mathbb{R}^3$.
(*Tipp*: Da $x \mapsto \sqrt{x}$ eine streng wachsende Funktion auf $[0,\infty)$ ist, lässt sich das Problem, $\sqrt{f}$ zu minimieren, dadurch lösen, dass man f minimiert.)

Aufgabe 8: Kugelkoordinaten (Teamaufgabe; 20 Punkte)
Ein Globus habe Radius 1, Mittelpunkt im Ursprung, Nordpol bei $(0,0,1)$ und nullten Längenkreis in der xz-Ebene. Wir betrachten wir den Punkt P mit Längengrad $\varphi \in [-\pi, \pi)$ (westliche Länge positiv gerechnet, östliche negativ) und Breitengrad $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (nördliche Breite positiv gerechnet, südliche negativ). Bestimmen Sie die Koordinaten (x,y,z) von P und begründen Sie Ihre Antwort geometrisch.

Aufgabe 9: Polynome in mehreren Variablen (Teamaufgabe; 20 Punkte)

(a) Das allgemeine Polynom ersten Grades in zwei Variablen x, y lautet $a + bx + cy$. Geben Sie explizit das allgemeine Polynom $p_4(x, y)$ vierten Grades an.

(b) Bestimmen Sie $\dfrac{\partial p_4}{\partial x}$, $\dfrac{\partial p_4}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 p_4}{\partial x \partial y}$ und $\dfrac{\partial^2 p_4}{\partial y \partial x}$.

(c) Das allgemeine Polynom vom Grad d in n Variablen kann man schreiben als

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n \\ \sum \alpha_i \leq d}} c_\alpha \, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \,.$$

Bestimmen Sie $\dfrac{\partial p}{\partial x_i}$ und $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Aufgabe 10: Kurvenlänge (20 Punkte)
Seien $r, h > 0$. Die Kurve $x(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)$ nennt man Helix oder Schraubenlinie (auch Korkenzieherkurve oder Wendeltreppenkurve).

(a) Zeichnen Sie drei Windungen der Kurve (für geeignete r, h).

(b) Berechnen Sie die Länge einer Windung.

Englisch-Vokabeln (freiwillig): Polynom = polynomial, homogen = homogeneous, Euklidisch = Euclidean, Norm = norm, Durchmesser = diameter, Punktprodukt = dot product, rotationssymmetrisch = rotationally symmetric, gerade Funktion = even function, ungerade Funktion = odd function, partielle Ableitung = partial derivative, Limes (Grenzwert) = limit, maximieren = maximize, Gradient = gradient [gräjdient], Richtungsableitung = directional derivative, Kurvenlänge = curve length, Flächenintegral = area integral, signiertes Volumen = signed volume, Mittelwert = mean value, Polarkoordinaten = polar coordinates, Kugelkoordinaten = spherical coordinates.

Abgabe: Bis Freitag 13.11.2020 um 18:00 Uhr auf `http://urm.math.uni-tuebingen.de`.