Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2020
18. November 2020

Analysis 2 Übungsblatt 4

Aufgabe 16: Lipschitz-stetige Funktionen auf metrischen Räumen (12 Punkte)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt Lipschitz-stetig, falls es ein $L \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$d_Y(f(a), f(b)) \leq L\, d_X(a, b) \qquad \text{für alle } a, b \in X\,.$$

Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion stetig ist.

Aufgabe 17: Der Abstand zu einer Menge (Teamaufgabe, 24 Punkte)

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Für jede Teilmenge $T \subset X$ definieren wir die Abbildung

$$d_T : X \to \mathbb{R}, \quad d_T(x) := \inf\{d(x, y) \,|\, y \in T\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\overline{T} = \{x \,|\, d_T(x) = 0\}$.

(b) Zeigen Sie, dass d_T stetig ist.

Aufgabe 18: Stetige Funktionen auf dem $\mathbb{R}^2$ (24 Punkte)

Entscheiden Sie (mit Beweis), welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig sind und welche nicht.

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,, \end{cases} \qquad g(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

$$h(x,y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Aufgabe 19: Konvexe Mengen (Teamaufgabe, 40 Punkte)

Eine Teilmenge K des $\mathbb{R}$-Vektorraumes V heißt *konvex*, wenn für je zwei Punkte $x, y \in K$ auch die Verbindungsstrecke in K liegt, d.h. $\forall t \in [0,1] : \; tx + (1-t)y \in K$.

(a) Zeigen Sie: Ist $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, so ist für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und jedes $r > 0$ die bezüglich dieser Norm gebildetet Kugel $B_r(x)$ konvex.

(b) Zeigen Sie: Ist $K \subset V$ konvex, sind $x_1, \ldots, x_k \in K$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$ mit $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$, so liegt $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \in K$. Eine solche Linearkombination nennt man eine *Konvexkombination.*

(c) Für jede Teilmenge $M \subset V$ sei $H(M)$ der Durchschnitt aller konvexen Mengen K, die M als Teilmenge enthalten. Zeigen Sie: $H(M)$ ist konvex. Sie heißt die *konvexe Hülle* von M.

(d) Zeigen Sie: $H(M)$ ist die Menge aller Konvexkombinationen von Elementen von M.

(e) Zeigen Sie: Der Abschluss einer konvexen Menge in einem normierten Raum ist konvex.

(f) Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn die Menge oberhalb ihres Graphen in $\mathbb{R}^2$, $K = \{(x, y) \in (a, b) \times \mathbb{R} | f(x) \leq y\}$, konvex ist. Zeigen Sie: f ist genau dann konvex, wenn für alle $x, z \in (a, b)$ und alle $t \in [0, 1]$ gilt

$$f\big(tx + (1 - t)z\big) \leq tf(x) + (1 - t)f(z)\,. \tag{1}$$

(g) Für alle $x < y$ aus (a, b) sei

$$s(x, y) := \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

die Sekantensteigung von f zwischen x und y. Zeigen Sie: f ist genau dann konvex, wenn für alle $x < y < z$ aus (a, b) gilt $s(x, y) \leq s(y, z)$.

(h) Zeigen Sie, dass für differenzierbares f gilt: f ist genau dann konvex, wenn f' auf (a, b) monoton wächst. (*Tipp*: Mittelwertsatz der Differenzialrechnung in $\mathbb{R}$.)

Englisch-Vokabeln (freiwillig): konvex = convex, gleichmäßige Konvergenz = uniform convergence, punktweise = pointwise, Häufungspunkt = accumulation point, Cauchyfolge = Cauchy sequence, Supremumsnorm = sup [ßuup] norm, Beweis durch Widerspruch = proof by contradiction, größer als = greater than, kleiner als = less than, größer-gleich = greater or equal, kleiner-gleich = less or equal, injektiv = one-to-one oder injective, surjektiv = onto oder surjective, bijektiv = bijective, Quotient oder Verhältnis = quotient oder ratio, Potenz = power, hoch = to the, x-Quadrat = x squared, x hoch 3 = x cubed, Größe = quantity.

Abgabe: Bis Freitag 27.11.2018 um 18:00 Uhr auf `http://urm.math.uni-tuebingen.de`.