Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2020
2. Dezember 2020

Analysis 2 Übungsblatt 6

Aufgabe 24: Niveaufläche (Teamaufgabe, 20 Punkte)

Die Funktion $F(x,y,z) = \sin(2\pi x)e^{yz} + x\sqrt{z/y}$ ist zumindest auf $(0,\infty)^3 \subset \mathbb{R}^3$ definiert. Man finde die Tangentialebene im $\mathbb{R}^3$ an die Fläche $F(x,y,z) = 1$ im Punkt $(x,y,z) = (1,2,2)$ und gebe sie in der Form $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ mit Konstanten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ an.

(Hinweis: In einer Vorlesung betrachteten wir Tangentialebenen an den Graphen einer Funktion $f(x,y)$, aber hier ist die Fläche nicht als Graph einer Funktion gegeben, daher ist die dort beschriebene Vorgehensweise hier nicht anwendbar. *Tipp*: Vorlesung über die Kettenregel.)

Aufgabe 25: Differenzierbarkeit (Teamaufgabe, 30 Punkte)

Sei E eine Euklidische Ebene. Eine Funktion $U : E \to \mathbb{R}$ lässt sich in Cartesischen Koordinaten als $u(x,y)$ oder in Polarkoordinaten als $\tilde{u}(r,\varphi)$ ausdrücken.

(a) Drücken Sie $u(x,y) = x/\sqrt{x^2+y^2}$, definiert für $(x,y) \neq (0,0)$, in Polarkoordinaten aus, zeichnen Sie das Konturdiagramm, und zeigen Sie, dass u sich nicht stetig in $(0,0)$ fortsetzen lässt.

(b) Wie lauten affin-lineare Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in Polarkoordinaten?

Wir betrachten nun Funktionen der Form $\tilde{u}(r,\varphi) = r\, g(\varphi)$, wobei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch ist.

(c) Wann (d.h. unter welcher Bedingung an g) ist u im Ursprung partiell differenzierbar?

(d) Wann existiert die Richtungsableitung von u im Ursprung in Richtung $(\cos\varphi, \sin\varphi)$? Wie lautet sie dann?

(e) Wann ist u im Ursprung total differenzierbar? (*Tipp*: Wenn u total differenzierbar ist, wie hängt dann die Richtungsableitung in Richtung $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ von φ ab?)

(f) Geben Sie ein Beispiel für g und damit auch u, für das alle Richtungsableitungen von u existieren, u aber nicht total differenzierbar ist.

Aufgabe 26: Laplace-Operator (25 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich Δu auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ wie folgt in Polarkoordinaten ausdrücken lässt:

$$\widetilde{\Delta u} = \partial_r^2 \tilde{u} + \frac{1}{r}\partial_r \tilde{u} + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 \tilde{u}\,.$$

Aufgabe 27: Newtonsche Mechanik (25 Punkte)

Die Newtonsche Mechanik ist eine physikalische Theorie, die besagt, dass das Universum aus N Materiepunkten (genannt Teilchen) besteht, die sich im Laufe der Zeit in einem 3-dimensionalen Euklidischen Raum bewegen (in dem wir ein Cartesisches Koordinatensystem einführen). Dabei gehorcht die Position $\boldsymbol{q}_k(t) \in \mathbb{R}^3$ des k-ten Teilchens zur Zeit t der Bewegungsgleichung

$$m_k \frac{d^2 \boldsymbol{q}_k}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} G m_j m_k \frac{\boldsymbol{q}_j - \boldsymbol{q}_k}{\|\boldsymbol{q}_j - \boldsymbol{q}_k\|^3} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} \frac{e_j e_k}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{q}_j - \boldsymbol{q}_k}{\|\boldsymbol{q}_j - \boldsymbol{q}_k\|^3} \,. \tag{1}$$

Hierbei ist $\| \cdot \|$ die Euklidische Norm in $\mathbb{R}^3$, G und ε_0 sind Naturkonstanten und $m_k > 0$, e_k Konstanten, genannt die Masse und die elektrische Ladung des k-ten Teilchens. Die *Energie* des Universums zur Zeit t ist definiert als

$$E(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{2} \left\| \frac{d\boldsymbol{q}_k}{dt} \right\|^2 - \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{N} \left(G m_j m_k - \frac{e_j e_k}{4\pi\varepsilon_0} \right) \frac{1}{\|\boldsymbol{q}_j - \boldsymbol{q}_k\|} \,. \tag{2}$$

Zeigen Sie: E ist eine Erhaltungsgröße, d.h. zeitunabhängig.

Tipp: Berechnen Sie dE/dt.

Englisch-Vokabeln (freiwillig): Sinus = sine, Cosinus = cosine, Tangens = tangent, Kotangens = cotangent, gerade Funktion = even function, ungerade Funktion = odd function, wohldefiniert = well defined, genau dann wenn = if and only if, (weg-)zusammenhängend = (pathwise) connected, Divergenz = divergence, Laplace-Operator = Laplacian operator, Rotation = curl, Hesse-Matrix = Hessian matrix, total differenzierbar = totally differentiable, Mittelwertsatz = mean value theorem, Taylor-Entwicklung = Taylor expansion.

Abgabe: Bis Freitag 11.12.2020 um 18:00 Uhr auf `http://urm.math.uni-tuebingen.de`.