Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2020
9. Dezember 2020

Analysis 2 Übungsblatt 7

Aufgabe 28: Gegenbeispiel zum Mittelwertsatz (20 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Zeigen Sie, dass mit $a = 0$ und $b = 2\pi$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$f(b) - f(a) \neq f'(\xi)(b - a)\,.$$

Aufgabe 29: Wellengleichung (Teamaufgabe, 30 Punkte)

Die *Wellengleichung* in einer Raumdimension ist die partielle Differenzialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{1}$$

für eine unbekannte Funktion $f(x,t)$. Hierbei ist $c > 0$ eine Konstante, genannt die Ausbreitungsgeschwindigkeit.

(a) Zeigen Sie, dass $f(x,t) = G(x - ct) + H(x + ct)$ eine Lösung von (1) ist für beliebige Funktionen $G, H \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Wir zeigen nun, dass alle Lösungen $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ von (1) von der Form wie in Teil (a) sind. Zur Vereinfachung setzen wir ab jetzt $c = 1$. Wir führen dazu folgende Koordinaten ein:

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}x - \tfrac{1}{\sqrt{2}}t \\ v &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}x + \tfrac{1}{\sqrt{2}}t\,. \end{aligned}$$

(b) Zeichnen Sie in dasselbe Diagramm die Koordinatenlinien für beide Koordinatensysteme ein. Formulieren Sie in Worten die geometrische Beziehung zwischen den beiden Koordinatensystemen.

(c) Drücken Sie (x,t) durch (u,v) aus. Bestimmen Sie die Darstellung $\tilde{f}(u,v)$ einer beliebigen Funktion $f(x,t)$ in den neuen Koordinaten. Drücken Sie nun insbesondere die Lösungen f aus Teil (a) als Funktionen von u und v aus ($c = 1$).

(d) Zeigen Sie, dass (1) äquivalent ist zu

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u\, \partial v} = 0\,. \tag{2}$$

(e) Zeigen Sie, dass jede Lösung $\tilde{f} \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ von (2) von der Form $\tilde{f}(u,v) = G\big(\sqrt{2}u\big) + H\big(\sqrt{2}v\big)$ ist mit $G, H \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Aufgabe 30: Taylorpolynome (Teamaufgabe, 20 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorpolynome der folgenden Funktionen bis zur zweiten Ordnung um den jeweils angegebenen Punkt:

(a) $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2+y}$ um den Punkt $(0, 0)$.

(b) $g(x, y) = 4x^2 \log(1 + x + y) - y^2$ um $(0, 0)$.

(c) $h(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$ um $(1, 1)$.

(d) $k(x, y, z) = x^2 + 4xy - 3y^2 + y + 2xz + 3z - 4$ um $(1, 3, -1)$.

Aufgabe 31: Taylorreihe (30 Punkte)

Bestimmen Sie bis hin zu beliebiger Ordnung n das Taylorpolynom $P^{(n)}_{f,(0,0)}$ für $f : (-1, 1)^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{1}{(1 - x)(1 - y)}.$$

Für welche Werte von (x, y) konvergiert die Taylorreihe, gilt also $\lim_{n\to\infty} P^{(n)}_{f,(0,0)}(x, y) = f(x, y)$?

Abgabe: Bis Freitag 18.12.2020 um 18:00 Uhr auf `http://urm.math.uni-tuebingen.de`.