Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2020
13. Januar 2021

Analysis 2 Übungsblatt 9

Aufgabe 36: Lokale Extrema unter Nebenbedingungen (Teamaufgabe, 25 Punkte)

Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 - y^3$ unter der Nebenbedingung $h(x, y) = 0$ mit $h(x, y) = x^2 + 2y^2 - 9$. (Für Ihre Antwort zur Art der Extrema ist kein Beweis erforderlich.)

Aufgabe 37: Extrema unter Nebenbedingungen (25 Punkte)

Man bestimme den achsenparallelen Quader größten Volumens, der dem Ellipsoid

$$E_{a,b,c} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

einbeschrieben ist. Fertigen Sie zur Orientierung zunächst eine Skizze der Situation in zwei Dimensionen an. Begründen Sie auch, warum Ihre Lösung nicht nur ein kritischer Punkt, sondern tatsächlich das (globale) Maximum ist.

Aufgabe 38: Abstand von einer Kurve (25 Punkte)

In Aufgabe 7 auf Blatt 2 war der Abstand zwischen dem Punkt $(2, 1, 1)$ und der Kurve $B = \{(1, t, t^2) | t \in \mathbb{R}\}$ zu berechnen. Lösen Sie diese Aufgabe nochmals mit Lagrange-Multiplikatoren, aber ohne Nachweis, dass die aufgefundene Lösung tatsächlich das Minimum ist.

(Dieser Nachweis kann übrigens so erfolgen: Man betrachte das Problem in $\overline{B}_r(2, 1, 1)$ und lasse dann $r \to \infty$ gehen. Da das Kurvenstück $B \cap \overline{B}_r(2, 1, 1)$ kompakt ist, nimmt die Abstandsfunktion zu $(2, 1, 1)$ dort ihre Extrema an, und zwar entweder im Innern des Kurvenstücks oder an den Endpunkten; aber an den Endpunkten wird der Maximalwert r angenommen, also nicht der Minimalwert.)

Aufgabe 39: Konvexe Funktionen (Teamaufgabe, 25 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn die Menge M oberhalb ihres Graphen, $M = \{(x, y) \in G \times \mathbb{R} | y \geq f(x)\}$, konvex ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Konvexität von G eine notwendige Bedingung für die Konvexität von f ist.

(b) Sei nun G offen und konvex und $f \in C^2(G, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass f genau dann konvex ist, wenn Hess f überall positiv semidefinit ist. (*Hinweis*: Benutzen Sie die Aussage von Aufgabe 19(h) von Blatt 4 als bekannt.)

Abgabe: Bis Freitag 22.1.2021 um 18:00 Uhr auf `http://urm.math.uni-tuebingen.de`.