Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2020
20. Januar 2021

Analysis 2 Übungsblatt 10

Aufgabe 40: Reihenfolge (Teamaufgabe, 25 Punkte)

Sei $f(y) = \min(1, \ln(1/y))$. Zeichnen Sie den Integrationsbereich im $\mathbb{R}^2$ des Integrals

$$\int_0^1 \left(\int_0^{f(y)} xy \, dx \right) dy$$

und berechnen Sie seinen Wert in *beiden* Integrationsreihenfolgen.

Aufgabe 41: Induktion (25 Punkte)

Sei $c > 0$ und sei

$$A_n := \{x \in \mathbb{R}^n | x_i \geq 0 \ \forall i, \ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq c\} .$$

Zeigen Sie durch Induktion, dass für das Volumen gilt $\mathrm{Vol}(A_n) = \frac{c^n}{n!}$.

Aufgabe 42: Kardioide (20 Punkte)

Die Gleichung $r = 1+\cos\varphi$ beschreibt in Polarkoordinaten eine geschlossene Kurve im $\mathbb{R}^2$, genannt Kardioide. Berechnen Sie den Flächeninhalt der von der Kardioide eingeschlossenen Fläche.

Aufgabe 43: Uneigentliche Integrale in $\mathbb{R}^n$ (Teamaufgabe, 30 Punkte)

Für die folgenden Funktionen $f(x, y)$ ist das Integral $I_0 := \int_{[0,1]^2} f(x, y)\, d(x, y)$ nicht definiert, weil f nicht überall auf $[0, 1]^2$ definiert ist und, selbst wenn man f überall irgendwie definierte, nicht stetig wäre. Trotzdem könnte aber

$$I := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[\varepsilon,1]^2} f(x, y)\, d(x, y)$$

in $\mathbb{R}$ existieren; man sagt dann, dass I_0 *als uneigentliches Integral konvergiert.* Bestimmen Sie jeweils, ob das Integral konvergiert, und gegebenenfalls den Wert.

(a) $f_1(x, y) = \dfrac{1}{xy}$, (b) $f_2(x, y) = \dfrac{1}{x + y}$, (c) $f_3(x, y) = \dfrac{1}{(x + y)^2}$.

Abgabe: Bis Freitag 29.1.2021 um 18:00 Uhr auf `http://urm.math.uni-tuebingen.de`.