Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2020
27. Januar 2021

Analysis 2 Übungsblatt 11

Aufgabe 44: Integration in Kugelkoordinaten (Teamaufgabe, 24 Punkte)

Sei $X = (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}^3$; dann ist $\Phi : X \to \Phi(X) \subset \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \big(r \sin\theta \cos\varphi,\ r \sin\theta \sin\varphi,\ r \cos\theta\big) =: \big(x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi)\big)$$

ein Diffeomorphismus und beschreibt Kugelkoordinaten auf dem $\mathbb{R}^3$. Sei ferner $B := \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitskugel.

(a) Leiten Sie aus der allgemeinen Transformationsformel den Ausdruck für $\int_B f(x, y, z)\, d(x, y, z)$ in Kugelkoordinaten her.

(b) Stellen Sie die Funktion $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = 1$ in Kugelkoordinaten dar und berechnen Sie mit Hilfe von Teil (a) $\int_B f(x, y, z)\, d(x, y, z)$.

(c) Dasselbe mit $(x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Aufgabe 45: Separation der Variablen (16 Punkte)

Lösen Sie jeweils das Anfangswertproblem $\quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad$ für

(a) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t, x) = tx$

(b) $f : \mathbb{R} \times (0, \pi) \to \mathbb{R},\ f(t, x) = \dfrac{t^2}{\sin x}$.

Aufgabe 46: Populationsmodell (20 Punkte)

Für die Größe $P(t)$ einer Fischpopulation in einem See nach t Jahren nehmen wird folgendes Modell an:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P - \beta P^2$$

with $\alpha = 4/\text{Jahr}$ und $\beta = 10^{-2}/\text{Jahr}$. (Der erste Term kann z.B. daher kommen, dass mehr Fische auch mehr Nachkommen haben, der zweite daher, dass zu viele Fische sich gegenseitig Ressourcen wie Nahrung wegnehmen werden.)

(a) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen und ermitteln sie, welche stabil, instabil oder halbstabil sind. Welche Gleichgewichtsgröße der Population wird sich einstellen?

(b) Es soll das Angeln erlaubt werden, und es stellt sich die Frage, wieviele Anglerlizenzen erteilt werden sollen. Nehmen Sie an, dass ein durchschnittlicher Angler 5 Fische pro Jahr fängt. Stellen Sie die modifizierte ODE auf für die Situation, dass L Lizenzen vergeben werden, und bestimmen Sie die Gleichgewichtsgröße der Population. Unter welchem Wert muss L liegen, damit die Population nicht ausstirbt?

Aufgabe 47: Stetige Verzinsung (20 Punkte)

Alfred möchte ein Haus kaufen und braucht dafür ein Darlehen von einer Bank; er kann sich monatliche Zahlungen von 1000 Euro leisten. Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass Zinsen kontinuierlich anfallen mit der Rate $r = 0.05/\text{Jahr}$, und dass Alfred seine Zahlungen kontinuierlich leistet.

(a) Stellen Sie eine ODE auf für die von Alfred an die Bank geschuldete Summe $x(t)$ nach t Jahren.

(b) Lösen Sie die ODE für $x(0) = M$.

(c) Bestimmen Sie die maximale Darlehenssumme M, die Alfred zu leihen sich leisten kann, wenn die Laufzeit des Darlehens 20 Jahre betragen soll.

Aufgabe 48: Eindeutigkeit von Lösungen? (Teamaufgabe, 20 Punkte)

Sei $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $v(x) = \sqrt{|x|}$. Bestimmen Sie mehrere Lösungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $\dot{x} = v(x)$ zum Anfangswert $x(0) = -1$ und skizzieren Sie einige davon in einem Raum-Zeit-Diagramm.

Abgabe: Bis Freitag 5.2.2021 um 18:00 Uhr auf `http://urm.math.uni-tuebingen.de`.