Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2020
3. Februar 2021

Analysis 2 Übungsblatt 12

Aufgabe 49: Potenzreihenansatz (20 Punkte)

Benutzen Sie den Ansatz $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$, um Lösungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Gleichung $\dot{x} = -tx$ zu bestimmen. Warum konvergieren die so erhaltenen Reihen für alle $t \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 50: Lipschitz-Stetigkeit (Teamaufgabe, 30 Punkte)

(a) Sei $v : G \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass v lokal Lipschitz-stetig ist. (*Hinweis*: Schrankensatz 4.46)

(b) Sei nun $v : G \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Zeigen Sie, dass $v|_K : K \to \mathbb{R}^n$ auf jedem Kompaktum $K \subset G$ Lipschitz-stetig ist. (*Hinweis*: Widerspruchsbeweis)

Aufgabe 51: Auseinanderlaufen von Lösungen (Teamaufgabe, 25 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v : G \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig mit Konstante $L > 0$. Die Funktionen $x, \tilde{x} : (-\delta, \delta) \to G$ seien beide Lösungen der DGL $\dot{x} = v(x)$, aber mit unterschiedlichen Anfangswerten $x(0) = x_0$ und $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$. Zeigen Sie, dass für alle $t \in [0, \delta)$ gilt

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \|x_0 - \tilde{x}_0\| e^{Lt} \,. \tag{1}$$

(Tatsächlich gilt (1) mit $e^{L|t|}$ statt e^{Lt} auch für $-\delta < t < 0$, aber das ist für die Aufgabe nicht verlangt.)
Hinweis: Zeigen Sie (1) zunächst für die Approximationen $\varphi_k = \Phi[\varphi_{k-1}]$, $\varphi_0(t) = x_0 \;\forall t$ und $\tilde{\varphi}_k$.

Aufgabe 52: Exponentialansatz (25 Punkte)

Die allgemeine lineare DGL vom Grad m in 1d mit konstanten Koeffizienten lautet

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \frac{d^k x}{dt^k} = g(t) \,, \tag{2}$$

wobei die nullte Ableitung $d^0 x/dt^0 = x(t)$ sein soll, $a_m \neq 0$ und g eine gegebene Funktion. Wir erlauben, dass x und g komplex-wertig sind (aber von einer reellen Variablen abhängen), $x, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, und die Koeffizienten a_k ebenfalls komplex sind. Die Funktion

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k$$

heißt das *charakteristische Polynom* der DGL (2). Man schreibt für (2) auch $P(\frac{d}{dt})x(t) = g(t)$. Wir betrachten den *homogenen Fall* $g(t) = 0$. Zeigen Sie:

(a) Sind Q, R komplexe Polynome und $P(\lambda) = Q(\lambda)\, R(\lambda)$, dann $P(\frac{d}{dt})x(t) = Q(\frac{d}{dt})R(\frac{d}{dt})x(t)$. (5 Punkte)

(b) Ist $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ Nullstelle von P, dann ist $x(t) = e^{\lambda_0 t}$ Lösung von $P(\frac{d}{dt})x(t) = 0$. (5 Punkte)

(c) Ist $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ eine r-fache Nullstelle von P, dann sind alle Funktionen $x_j(t) := t^j e^{\lambda_0 t}$ mit $j = 0, 1, \ldots, r-1$ Lösungen der Differentialgleichung $P(\frac{d}{dt})x(t) = 0$. (15 Punkte)

  Hinweis: In dem Fall ist $P(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^r$ mit einem Polynom $Q(\lambda)$; man betrachte $(\frac{d}{dt} - \lambda_0)^r x_j(t)$.

Abgabe: Bis Freitag 12.2.2021 um 18:00 Uhr auf `http://urm.math.uni-tuebingen.de`.