Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2020
10. Februar 2021

Analysis 2 Übungsblatt 13

Aufgabe 53: Wachstumsverhalten bei linearer DGL (20 Punkte)

Es sei $A : \mathbb{R} \to M(n, \mathbb{R})$ stetig. Wir betrachten die DGL $\dot{x} = A(t)x$ in $\mathbb{R}^n$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ sei $A(t) + A(t)^T$ negativ semidefinit, d.h. $\langle v, (A(t) + A(t)^T)v \rangle \leq 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Entlang jeder Lösung nimmt die Euklidische Norm monoton ab, d.h. $\|x(t_1)\| \geq \|x(t_2)\|$ für $t_1 < t_2$.

Tipp: Berechnen Sie $\frac{d}{dt}\langle x(t), x(t) \rangle$.

Aufgabe 54: Der Lösungsoperator einer linearen DGL (25 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \to M(n, \mathbb{R})$ stetig. Sei $\Phi(t_0, t_1) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der Propagator der homogenen linearen Differentialgleichung $\dot{x} = A(t)x$ vom Anfangszeitpunkt t_0 bis zur Zeit t_1, also $\Phi(t_0, t_1)x_0 = x(t_1)$ für die maximale Lösung von $\dot{x} = A(t)x$ mit $x(t_0) = x_0$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $t_0, t_1 \in I$ ist $\Phi(t_0, t_1)$ ein Vektorraumisomorphismus.

(b) Die Matrix $\Phi(t_0, t)$ erfüllt $\quad \dfrac{\partial}{\partial t}\Phi(t_0, t) = A(t)\Phi(t_0, t) \quad$ und $\quad \Phi(t_0, t_0) = E_n$.

Aufgabe 55: Die Dyson-Reihe (Teamaufgabe, 30 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Intervall, $t_0 \in I$ und $A : I \to M(n, \mathbb{R})$ stetig. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t)\, x \tag{1}$$

und machen den Ansatz

$$x(t) = \left(E_n + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{j-1}} dt_j\, A(t_1) \cdots A(t_j) \right) x_0.$$

(a) Rechnen Sie nach, dass x die Differentialgleichung (1) zumindest formal löst, also indem Sie die Reihe einfach gliedweise differenzieren.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe in der Definition von $x(t)$ absolut konvergent ist für alle $t \in I$.

(c) Zeigen Sie, dass $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ und, dass x tatsächlich die Differentialgleichung (1) löst.
Hinweis: Hierzu müssen Sie zeigen, dass Sie die Reihe gliedweise differenzieren dürfen. Eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass die Partialsummenfolge der abgeleiteten Reihe gleichmäßig konvergiert (das ist ein Satz aus Analysis 1).

Aufgabe 56: Variation der Konstanten (Teamaufgabe, 25 Punkte)

Bestimmen Sie für folgende inhomogene lineare Differentialgleichungen die Lösung jeweils zu allen Anfangswerten $x_0 \in \mathbb{R}$.

(a) $\dot{x} = -\dfrac{x}{1+t} + e^{2t} \qquad$ für beliebiges $t_0 \in (-1, \infty)$.

(b) $\dot{x} = \tan(t)\, x + \dfrac{1}{\cos(t)} \qquad$ für $t_0 = 0$.

Abgabe: Bis Freitag 19.2.2021 um 18:00 Uhr auf `http://urm.math.uni-tuebingen.de`.