Musterlösung

A1

a) wahr

b) falsch

c) falsch

d) wahr

e) falsch

f) wahr

A2

$f(x,y) = e^{-x^2+2xy}$

$P = (0,0)$

$f(0,0) = 1$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} (-2x+2y)\cdot e^{-x^2+2xy} \\ 2x \cdot e^{-x^2+2xy} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f\big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Hf = \begin{pmatrix} ((-2x+2y)^2-2)\, e^{-x^2+2xy} & (4xy-4x^2+2)\, e^{-x^2+2xy} \\ (4xy-4x^2+2)\, e^{-x^2+2xy} & 4x^2\, e^{-x^2+2xy} \end{pmatrix}$$

$$Hf\big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^3_{f,(0,0)} = f(0,0) + \nabla f\big|_{(0,0)} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-0, y-0)\, Hf\big|_{(0,0)} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} -2x+2y \\ 2x \end{pmatrix}$$

$$= 1 - x^2 + 2xy$$

A3 $\quad f(x,y) = 2x^3 - 6xy + y^2 + 4$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 6x^2 - 6x \\ -6x + 2y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad H_f = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

(I) $\quad 6x^2 = 6y$

(II) $\quad 6x = 2y$

$x = \frac{1}{3} y \quad$ in (I)

$$\left(\frac{1}{3}y\right)^2 = y$$

$y\left(\frac{1}{9}y - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0 \qquad P_1(0,0)$

$\frac{1}{9} y = 1$

$y = 9 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 9 \qquad P_2(3,9)$

$H_f|_{P_1} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det(H_f) < 0 \Rightarrow H_f$ ist indefinit in P_1

$\Rightarrow$ kein Lok. Extremum in P_1

$H_f|_{P_2} = \begin{pmatrix} 36 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det(H_f) > 0 \Rightarrow H_f$ ist definit in P_2

Diagonalisieren liefert positive Eigenwerte

$\Rightarrow f$ hat Lok. Minimum in $(3,9)$ bei -23

//

A4 Seien $(x_n) := (y_n) := \frac{1}{n}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \frac{5\frac{1}{n^2} - 2\frac{1}{n^2}}{7\frac{1}{n^2} + 3\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{10}$$

Sei $(x_n) := \frac{1}{n}$, $(y_n) := 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \frac{5\frac{1}{n^2}}{7\frac{1}{n^2}} = \frac{5}{7}$$

Damit der Grenzwert existiert müsste jede Folge gegen den selben Wert konvergieren.

$\Rightarrow$ Der Grenzwert existiert nicht

A6

$f(x,y,z) = x^5 + y^5 + z^5 = 8$

$P = (a, b, c)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 5y^4$; $\frac{\partial f}{\partial z} = 5z^4$

$$\Rightarrow \nabla f = \begin{pmatrix} 5x^4 \\ 5y^4 \\ 5z^4 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \end{pmatrix}$$

$$T(x,y,z) = f(P) + \left\langle \nabla f\big|_{(a,b,c)}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - P \right\rangle$$

$$= a^5 + b^5 + c^5 + \left\langle \begin{pmatrix} 5a^4 \\ 5b^4 \\ 5c^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= a^5 + b^5 + c^5 + 5a^4(x-a) + 5b^4(y-b) + 5c^4(z-c)$$

Sei $T(x,y,z) = 8$

$8 = -4a^5 - 4b^5 - 4c^5 + 5a^4x + 5b^4y + 5c^4z$

$= -4\underbrace{(a^5 + b^5 + c^5)}_{=8} + 5(a^4x + b^4y + c^4z)$

$= -32 + 5(a^4x + b^4y + c^4z)$

$40 = 5(a^4x + b^4y + c^4z)$

$\Rightarrow a^4x + b^4y + c^4z = \underline{\underline{8}}$

A7 $\quad f(x,y,z) = x + 3yz \qquad h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Nach dem Satz von Weierstraß nimmt f Minima und Maxima an, da f stetig ist und die Sphäre kompakt.

$\nabla f = \lambda \nabla h$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3z \\ 3y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$\underline{I} \quad 1 = 2\lambda x$

$\underline{II} \quad 3z = \lambda 2y$

$\underline{III} \quad 3y = \lambda 2z$

$\underline{IV} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

$\underline{II} \cdot y - \underline{III} \cdot z$

$$\begin{aligned} & 3zy - \lambda 2y^2 = 0 \\ - \; & 3yz - \lambda 2z^2 = 0 \\ \hline & \lambda (2z^2 - 2y^2) = 0 \end{aligned}$$

$\lambda \neq 0$ wegen (I)

$z^2 = y^2 \quad \overset{IV}{\Rightarrow} \quad x^2 + 2z^2 = 1$

$I \cdot y - II \cdot x$

$$y - 2\lambda xy = 0$$
$$- \quad 3zx - 2\lambda yx = 0$$

$$y - 3zx = 0$$

$$y = 3zx$$

$$(3zx)^2 = z^2$$

$$9z^2x^2 = z^2 \qquad \text{oder } z = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{3}$$

$$x^2 + 2z^2 = 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{9} + 2z^2 = 1$$

$$z^2 = \frac{4}{9}$$

$$z = \pm \frac{2}{3}$$

Mit (I) folgt: Wenn $x \neq 0$, dann gilt $\lambda \neq 0$. Damit folgt für y und z:

$$y \cdot z > 0$$

$P_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ $P_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $P_3\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $P_4\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$
$P_5(1, 0, 0)$, $P_6(-1, 0, 0)$

($P_7\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $P_8\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ sind keine Lösung der Lagrange-Gleichung
(wegen Gl (I) und (II))

Mit einsetzen in f ergeben sich P_1, P_2 als Maxima bei $\frac{5}{3}$ und
P_3, P_4 als Minima bei $-\frac{5}{3}$

A 8

a) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$

Exponentialansatz:

$x(t) = c \cdot e^{\lambda t}$

$\dot{x}(t) = c \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t}$

$\ddot{x}(t) = c \cdot \lambda^2 e^{\lambda t}$

$\lambda^2 c \cdot e^{\lambda t} + 4\lambda c e^{\lambda t} + 4 c e^{\lambda t} = 0$

$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

$\lambda_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2}$

$= \dfrac{-4}{2} = \underline{\underline{-2}}$ $\Rightarrow$ Doppelte Nullstelle

$x(t) = c_1 \cdot e^{-2t} + c_2 t \; e^{-2t}$

b.)

$\boxed{\text{I}}$ $\dot{\vec{x}} + D\,\vec{x} = f(t)$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -1\\ 4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ g(t)\end{pmatrix}$$ mit $x_1 \hat{=} x$ und $x_2 = \frac{dx_1}{dt}$

$$\vec{x}_{H,1} = \begin{pmatrix}e^{-2t}\\ -2e^{-2t}\end{pmatrix} \qquad \vec{x}_{H,2} = \begin{pmatrix}te^{-2t}\\ e^{-2t} - 2te^{-2t}\end{pmatrix}$$

Ansatz: $\vec{x} = a(t)\,\vec{x}_{H1} + b(t)\,\vec{x}_{H2}$

eingesetzt in $\boxed{\text{I}}$

$$\dot{a}(t)\,\vec{x}_{H1} + a(t)\,\dot{\vec{x}}_{H1} + \dot{b}(t)\,\vec{x}_{H2} + b(t)\,\dot{\vec{x}}_{H2} + D\,(a(t)\,\vec{x}_H + b(t)\,\vec{x}_{H2}) = f(t)$$

Da $a(t)\,\dot{\vec{x}}_{H1} + b(t)\,\dot{\vec{x}}_{H2} + D\,(a(t)\,\vec{x}_{H1} + b(t)\,\vec{x}_{H2})$ die homogene DGl lösen, fallen diese raus.

$$\Rightarrow \quad \dot{a}(t)\,\vec{x}_{H1} + \dot{b}(t)\,\vec{x}_{H2} = f(t)$$

komponentenweise folgt

$\boxed{\text{I}}$ $\dot{a}(t)\,e^{-2t} + \dot{b}(t)\,te^{-2t} = 0$

$$\dot{a}(t) = -\dot{b}(t)\cdot t$$

$\boxed{\text{II}}$ $-2\dot{a}(t)e^{-2t} + \dot{b}(t)\,(e^{-2t} - 2te^{-2t}) = t^{-2}e^{-2t}$

eingesetzt:

$$2\dot{b}(t)\cdot t + \dot{b}(t)\,(1-2t) = t^{-2}$$

$$\dot{b}(t) = t^{-2}$$

Integrieren liefert $\quad b(t) = -\frac{1}{t} + c_1$

$$a(t) = -\ln(t) + c_2$$

Damit ergibt sich:

$$x(t) = \left(-\ln(t) + c_1\right) e^{-2t} + \left(-\frac{1}{t} + c_2\right) t e^{-2t}$$

$$= \underbrace{(c_1 - 1)}_{c_1'} e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} - \ln(t)\, e^{-2t}$$

$$= c_1' e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} - \ln(t)\, e^{-2t}$$

A9

a)

$$J = \int_0^2 \int_{x^2}^5 xy \, dy \, dx$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{1}{2} x y^2\right]_{x^2}^5 dx$$

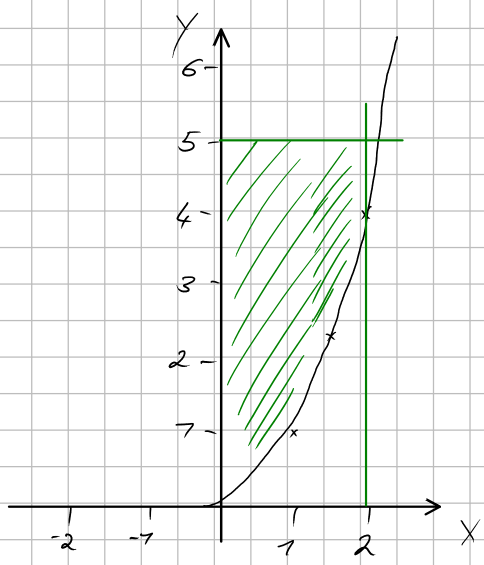
$$= \int_0^2 \left(\frac{25}{2} x - \frac{1}{2} x^5\right) dx$$

$$= \frac{25}{2} \int_0^2 x \, dx - \frac{1}{2} \int_0^2 x^5 \, dx$$

$$= \frac{25}{2} \left[\frac{1}{2} x^2\right]_0^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} x^6\right]_0^2$$

$$= \frac{59}{3}$$

b)

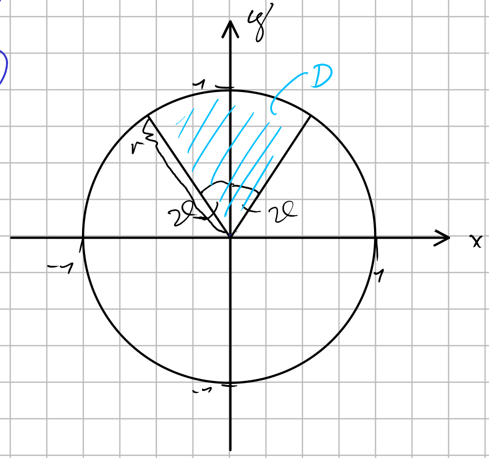


c)

$$I = \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{y}} xy \, dx + \int_4^5 dy \int_0^2 dx \, xy$$

A10

a)



b)

$$A_D = \int_0^1 r'dr' \int_{\frac{\pi}{2}-\vartheta}^{\frac{\pi}{2}+\vartheta} d\vartheta'$$

$$\Leftrightarrow A_D = \int_0^1 r'dr' \int_0^{2\vartheta} d\vartheta'$$

$$= 2\vartheta \int_0^r r'dr'$$

$$= 2\vartheta \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^1$$

$$= 2\vartheta \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \underline{\underline{\vartheta}} \quad (FE)$$

c) $s_x = 0$, „Kuchenstück" ist Achsensymmetrisch zur y-Achse. Damit muss s auf der y-Achse liegen: $s_x = 0$

$$\vec{s} = \frac{1}{A}\int r' \begin{pmatrix} \cos(\vartheta') \\ \sin(\vartheta') \end{pmatrix} r'dr'd\vartheta'$$

$$= \frac{1}{A}\int_0^1 r^2 dr \int_{\frac{\pi}{2}-\vartheta}^{\frac{\pi}{2}+\vartheta} \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix} d\vartheta$$

$$= \frac{1}{A}\int_0^1 r^2 dr \int_{\frac{\pi}{2}-\vartheta}^{\frac{\pi}{2}+\vartheta} \begin{pmatrix} \cos(\vartheta') \\ \sin(\vartheta') \end{pmatrix} d\vartheta'$$

$$= \frac{1}{A}\int_0^1 r^2 dr \begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{2}+\vartheta) - \sin(\frac{\pi}{2}-\vartheta) \\ -\cos(\frac{\pi}{2}+\vartheta) + \cos(\frac{\pi}{2}-\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{A}\int_0^1 r^2 dr \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sin(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3A}\begin{pmatrix} 0 \\ 2\sin(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{3A}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Mit $A = \vartheta$ ergibt sich dann:

$$s_y = \frac{2}{3\vartheta} \cdot \sin(\vartheta)$$

und $\vec{s} = \frac{2}{3\vartheta}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix}$

N.B.:

Für sehr kleine Winkel gilt dann mit der Kleinwinkelnäherung:

$$s_y = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

A11

$\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\sin(2t), \cos(3t), t^2)$

$v: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$

Der Hauptsatz für Wegintegrale gilt hier nur, falls $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$, also wenn $\vec{v}$ ein Gradientenfeld ist. Physikalisch kann man $\vec{v}$ dann als konservatives Kraftfeld deuten.

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} = 0 \checkmark$$

Damit gilt:

$$\int_\gamma v \, ds = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b))$$

mit $\vec{v} = DF$, also $\vec{v} = \operatorname{grad} F$. Desweiteren gilt $a = 2\pi$ und $b = 0$

Mit $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$ gilt dann:

$$\int_\gamma v \, ds = \sin(4\pi) \cdot \cos(6\pi) \cdot 4\pi^2 - \sin(0) \cos(0) \cdot 0$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

A12

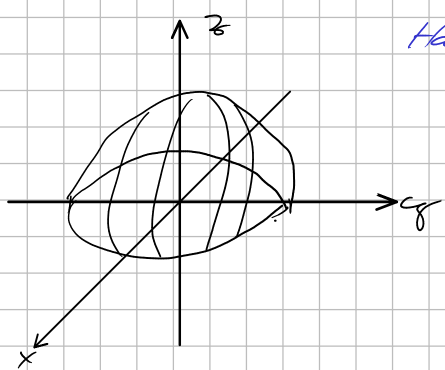
$z > 0$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$(x(r,\vartheta,\varphi), y(r,\vartheta,\varphi), z(r,\vartheta,\varphi)) = (r \sin(\vartheta) \cos(\varphi), r \sin(\vartheta) \sin(\varphi), r \cos(\vartheta))$

$(r, \vartheta, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi)$

a)



Halbkugel über der x-y-Ebene

b)

$r \in (0, 1]; \; \vartheta \in (0, \frac{\pi}{2}); \; \varphi \in (-\pi, \pi)$

c)

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \sin(\vartheta)^2 \cos(\varphi)^2 + r^2 \sin(\vartheta)^2 \sin(\varphi)^2 + r^2 \cos(\vartheta)^2$$

mit $x = r \sin(\vartheta)\cos(\varphi)$, $y = r \sin(\vartheta)\sin(\varphi)$, $z = r\cos(\vartheta)$

$$= r^2 \sin(\vartheta)^2 (\underbrace{\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2}_{=1}) + r^2 \cos(\vartheta)^2$$

$$= r^2 (\underbrace{\sin(\vartheta)^2 + \cos(\vartheta)^2}_{=1})$$

$$= r^2$$

Damit gilt

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \overset{\text{In Kugel-koordinaten}}{=} r$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r}$$

c)

$$\int_W f(x,y,z) \, d(x,y,z) = \int_W \tilde{f}(r,\vartheta,\varphi) \, r^2 \sin(\vartheta) \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r} \, r^2 \sin(\vartheta) \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} r \, \sin(\vartheta) \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left[-r \cos(\vartheta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 (\underbrace{-r \cos(\tfrac{\pi}{2})}_{=0} + \underbrace{r \cos(0)}_{=r}) \, dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2} - 0 \right)$$

$$= \pi$$