Rep.: Folgen

Def • konv. Folge: Sei X top. R., $x_n \in X$.

$x_n \to a \iff \forall$ Umg U von a $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N: x_n \in U$.

• Cauchyfolge: Sei X metr. R., $x_n \in X$.

(x_n) Cauchyfolge $\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall m,n \geq N: d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

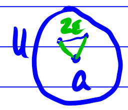
• beschr. Folge: Sei X metr. R., $x_n \in X$.

(x_n) beschr $\iff \exists x_0 \in X \; \exists r > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}: d(x_n, \underset{\uparrow \, x_N}{x_0}) < r$.

Aufgabe: Wahr in metr. R. ein oder im allg. falsch?

1) Jede konv. Folge ist Cauchy.

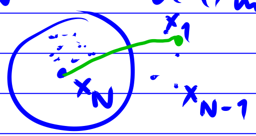
wahr:



2) Jede Cauchyfolge ist beschr.

wahr:

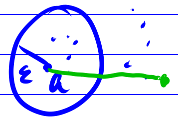
$\forall m,n \geq N: \quad d(x_m, x_N) < \varepsilon$



$r = 2\max\{\varepsilon, d(x_1, x_N), \dots, d(x_{N-1}, x_N)\}$

3) Jede konv. Folge ist beschr.

wahr:



$x_0 = a$ $\quad r = 2\max\{\varepsilon, d(a,x_1), \dots, d(a,x_{N-1})\}$

4) Jede Cauchyfolge ist konv.

falsch. $\Leftrightarrow$ X vollst.

5) Jede beschr. Folge ist Cauchy.

falsch. $(x_n) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$