Maximieren in der Praxis

Problem: $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$

Finde $\sup\limits_{x \in U} f(x)$.

Satz (notw. Bed. für Extr.)

U offen, $x \in U$. Wenn

(i) f ein lok. Max. in x hat und

(ii) f in x diffbar ist, dann

$\nabla f(x) = 0$.

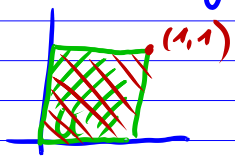
Korollar Für $U \subset \mathbb{R}^n$ (nicht unbed. offen), $f : U \to \mathbb{R}$ gilt eine der folgenden Möglichkeiten:

1) f nimmt Max. bei $x \in U$ an, und x liegt
   a) entweder auf ∂U
   b) oder an einem nicht-diffbaren Pkt im Inneren
   c) oder wo $\nabla f(x) = 0$. im Innern

2) f nimmt kein Max. an, aber $\exists\, (x_n)$ in U: $f(x_n) \to \sup\limits_{x \in U} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und
   a) entweder $|x_n| \to \infty$
   b) oder $x_n \to x \in \partial U \cancel{\setminus U}$ wenn $\in U$, dann ist f nicht stetig in x
   c) oder $x_n \to x \in \mathring{U}$, und f ist nicht stetig in x.

Bsp $f(x,y) = x+y$ für $0 \le x,y \le 1$

$U = [0,1]^2$



$\nabla f(1,1) = (1,1) \neq 0$

$\nabla f(x,y) = (1,1)$

Bem "Max. f" $\iff$

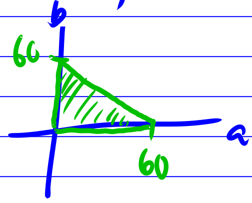
- "Max f^2", vorausges. $f \ge 0$.
- "Max $\sqrt{f}$", vorausges. $f \ge 0$
- "Max $\ln f$", vorausges. $f > 0$
- "Max e^f",

Aufgabe: Finde $a,b,c \ge 0$, deren Summe $=60$ und deren Produkt max. ist.

Lösung: $c = 60 - a - b$

$U = \{(a,b) : 0 \le a \le 60,\ 0 \le b \le 60,\ a+b \le 60\}$

$f(a,b) = ab(60-a-b)$



$\nabla f = ?$

$\frac{\partial f}{\partial a} = b(60-a-b) + ab(-1) = 0 \iff b(60-a-b) = ab$

$\frac{\partial f}{\partial b} = a(60-a-b) + ab(-1) = 0 \iff a(60-a-b) = ab$

$b=0$ (∂U) oder $60-a-b = a$

$a=0$ (∂U) oder $60-a-b = b$

$\nabla f = 0$ in $\mathring{U}$ $\Rightarrow$ $a = b$ $\Downarrow$ $a=20,\ b=20,\ c=20$

$f(20,20) = 20^3$

Gibt es nicht-diffbare Pkte? Nein.

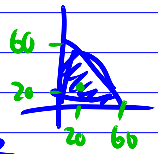
Werte auf dem Rand? 0

Also $\sup_U f = 20^3$.

<u>Aufgabe</u>: Finde $a, b, c \geq 0$, deren Summe $= 60$ ist ($a+b+c=60$) und deren Quadratsumme $a^2+b^2+c^2$ max. ist.

<u>Lösung</u>: $c = 60 - a - b$

U wie vorher



$$f(a,b) = a^2 + b^2 + (60-a-b)^2$$

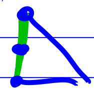
$$\frac{\partial f}{\partial a} = 2a - 2(60-a-b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 2b - 2(60-a-b)$$

$$0 = \nabla f \iff (a = c \text{ und } b = c)$$
$$\iff (a = 20,\ b = 20,\ c = 20)$$

$f(20,20) = 3 \cdot 20^2 = 1200$, $\nexists$ nicht-diffbare

Werte auf dem Rand?



<u>$a=0$</u>: $f(0,b) = b^2 + (60-b)^2 =: g(b)$

Maximiere g auf $[0,60]$:

$$\frac{dg}{db} = 2b - 2(60-b) = 0 \iff b = 60-b$$
$$\iff b = 30 \quad (\nexists \text{ nicht-diffbare})$$

$\underset{=1800}{g(30) = 2 \cdot 30^2}$, $\underset{=3600}{g(0) = 60^2}$, $\underset{=3600}{g(60) = 60^2}$

Also $\max g = 3600$.

Ebenso $b = 0$, $a+b=60$: $\max = 3600$

Fazit: $\max f = 3600 = f(0,60)$
$= f(0,0) = f(60,0)$.