Beispiele zur Lagrange-Methode

Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813)

Bsp 6.13 Maximiere $f(x,y) = \overset{y^2-x^2}{\cancel{x^2-y^2}}$

A1 auf $\overline{B_1(0)} =: K$

f st., K komp $\Rightarrow$ f nimmt sup an.

$$\underset{\underset{K}{\cap}}{f(x_0,y_0)} = c := \sup_{(x,y)\in K} f(x,y)$$

Aufg: Finde c und alle solchen (x_0,y_0).

- nicht-diffbare Pkte $\nexists$
- innere Pkte: $\nabla f = (-2x, 2y)$

$0 = \nabla f(x_0,y_0) \Rightarrow x_0 = 0,\ y_0 = 0$

$\operatorname{Hess} f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ indef.

$\Rightarrow$ kein lok. Extr. in $B_1(0)$.

- Rand: Nebenbed. $h = 0$

mit $h(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

Ist $a = (x_0,y_0)$ Max von f auf $\overline{B_1(0)}$,

dann auch auf $\partial B_1(0) =: M$, also

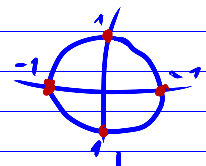
auch lok. Max. auf M, $\nabla h = (2x, 2y) \neq 0$ auf M

Also
$$\left.\begin{aligned} -2x &= \lambda\, 2x \\ 2y &= \lambda\, 2y \end{aligned}\right\} \text{ Lagrange-Bed.}$$
$$x^2+y^2 = 1 \quad \} \text{ Nebenbed.}$$

Lsg: Wenn $x \neq 0$, dann $\lambda = -1$, $y = 0$, $x = \pm 1$

Wenn $x = 0$, dann $y \neq 0$, $\lambda = 1$, $x = 0$, $y = \pm 1$

$\Rightarrow$ Extr. mögl. nur bei
("einzige Kandidaten sind")



$a \in \{(1,0),\ (-1,0),\ (0,1),\ (0,-1)\}$

$f(\pm 1, 0) = -1$

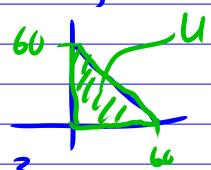
$f(0, \pm 1) = 1$

Also $c = 1$, wird angen. genau bei $(0,1)$ und $(0,-1)$.

Bsp Finde $a, b, c \geq 0$ mit $a+b+c = 60$
so, dass $a^2+b^2+c^2$ max. ist.

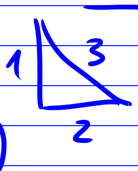
Vorgehen A: $f(a,b) = a^2+b^2+(60-a-b)^2$
auf $U = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq a,b,\ a+b \leq 60\}$

Untersuche $\mathring{U}$, ∂U



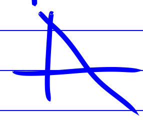
$\partial U = Str_1 \cup Str_2 \cup Str_3$

$f(0,y)$ parametrisiert, $f(x,0)$, $f(x,1-x)$



__Vorgehen B__ Lagrange-Methode für

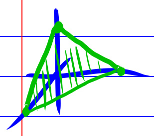
Str$_i$: $h_1(x,y) = x$



$h_2(x,y) = y$

$h_3(x,y) = x+y-60$

__Vorgehen C:__ Lagrange-Methode in $\mathbb{R}^3$



$$h(a,b,c) = a+b+c-60$$

$$f(a,b,c) = a^2+b^2+c^2$$

$$M = \{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \mid 0 \le a,b,c,\ h(a,b,c)=0\}$$

$$= \text{konvexe Hülle}\left(\left\{\begin{pmatrix}60\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\60\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\60\end{pmatrix}\right\}\right)$$

$$= E \cap [0,\infty)^3, \quad E = \{h=0\} \perp \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

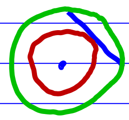
$$\nabla f(a,b,c) = \begin{pmatrix}2a\\2b\\2c\end{pmatrix}, \quad \nabla h(a,b,c) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Lagrange-Bed. $\nabla f = \lambda \nabla h \iff \begin{pmatrix}2a\\2b\\2c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\\lambda\end{pmatrix}$

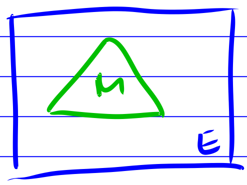
$$\iff a=b=c=\frac{\lambda}{2}$$

$h=0 \implies a=20=b=c, \quad \lambda=40$

ist lok. Min.



Also kein lok. Max. im Innern von M bzgl. E.



Untersuche Rand von M in E ($\neq \partial M$ in $\mathbb{R}^3$) $= 3$ Strecken.