Rep.: Verschiedene Räume
(Kap. 1–3)

	∞d	$<\infty d$
VR: Skalarprod.-Raum $\Downarrow$ "inj." "nicht surj." normierter Raum $\Downarrow$ "inj." "nicht surj." metr. Raum $\Downarrow$ "nicht inj." "nicht surj." top. Raum		Äq. d. Normen vollst., Banach Heine-Borel

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ (geg. $\|\cdot\|$, $\exists \langle\cdot,\cdot\rangle \Leftrightarrow$ Parallelo~~...~~gramm-gl.)

$d(x,y) = \|x-y\|$ (geg. d, $\exists \|\cdot\| \Leftrightarrow d$ homogen und transl.-inv.)

$\mathcal{T} = \{U \subset X \mid \forall x \in U\ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset U\}$

(wobei $B_r(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$ in metr. R.)

Äq. der Normen

$c\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C\|x\|_a$

$$<\infty d \text{ VR} \begin{array}{l} \rightsquigarrow \text{norm. R.} \rightsquigarrow \\ \rightsquigarrow \text{norm. R.} \rightsquigarrow \end{array} \text{top. R.}$$

Def Konvergenz $x_n \to x$ $(x_n, x \in X)$

top. Raum: $\forall$ Umg. U von x $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$: $x_n \in U$.

(U Umg. von x $\overset{Def}{\iff}$ $\exists V \in \mathcal{T}$: $x \in V \subset U$)

metr. Raum: $\forall \epsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$: $d(x_n, x) < \epsilon$.

norm. Raum: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$: $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

$< \infty$ d VR mit Basis: $x_n \to x$ $\iff$ komponentenweise $x_n^k \xrightarrow{n \to \infty} x^k$ $\forall k$

Def Häufungspunkt x von (x_n)

top. Raum: $\forall$ Umg. U von x: ∞-viele $x_n \in U$.

metr. Raum: $\exists$ konv. Teilfolge $x_{n_m} \xrightarrow{m \to \infty} x$

Def stetig $f: X \to Y$

top. R.e: $\forall U \in \mathcal{T}_Y$: $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$

metr. R.e: $\forall \varepsilon>0\ \forall x\in X\ \exists \delta>0\ \forall x'\in X$:

wenn $d_X(x,x')<\delta$, dann $d_Y(f(x),f(x'))<\varepsilon$

$\Longleftrightarrow \forall x_n \to x:\ f(x_n) \longrightarrow f(x)$

($\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ in top. R.en)

<u>vollständig</u> • nicht def. in top. R.en

• def. in metr. R.en:

<u>Def</u> Jede Cauchyfolge konv.

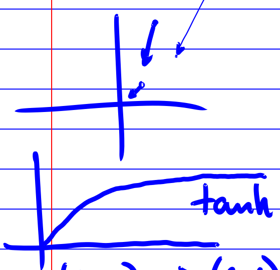
((x_n) Cauchyfolge $\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}$

$\forall m,n\geq n_0:\ d(x_m,x_n)<\varepsilon.$)

• $<\infty$d norm. R. stets vollst.

(aber nicht jede Metrik auf $\mathbb{R}^n$

ist vollst., z.B. auf $\mathbb{R}^2$



$$d(x,y) := d_{Eukl}(\Phi(x),\Phi(y))$$

mit $\Phi(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{\tanh\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}(x_1,x_2) \\ (0,0) \text{ falls } (x_1,x_2)=(0,0) \end{cases}$

$(0,\infty)\to(0,1)$ bij $\quad \tilde{\Phi}(r,\varphi) = (\tanh r, \varphi)$)

<u>In vollst. metr. R.en X gilt:</u>

▷ Für $A\subset X$: A vollst $\Leftrightarrow$ A abg.

▷ Fixpunktsatz von Banach

Def kompakt $A \subset X$

top. Raum: $\forall$ offene Überdeckung von A
$\exists$ endl. Teilüb. von A.

$\mathbb{R}^n$ od VR: A abg. und beschr.
(Heine-Borel)

(in top. R.en: A komp $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ A abg & beschr.)

In Kompakta gilt:

- Bolzano-Weierstraß:
  $\forall$ Folge (x_n) $\exists$ Häufungspunkt
- Weierstraß:
  stetiges $f: K \to \mathbb{R}$ nimmt
  Max. und Min. an