Prof. Dr. R. Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2020
16.2.2021

Übungsklausur zur Analysis 2

Informationen zur Klausur/zum Test: Bücher, Notizen und elektronische Hilfsmittel sind bei der Klausur/dem Test nicht erlaubt. Ich muss Sie darauf hinweisen, dass während der Klausur/des Tests die Kommunikation mit anderen Personen eine unerlaubte Verletzung der akademischen Integrität darstellt und schwerwiegende Konsequenzen haben kann. Den Stoff der Klausur/des Tests bilden das Skript ohne Kapitel 7, das Zusatzkapitel 0 und die Übungsblätter 1–13.

In der Klausur/im Test streichen Sie falsche oder irreführende Teile Ihres Aufschriebs, die nicht bewertet werden sollen, deutlich durch. Eine unübersichtliche, unklare oder unleserliche Darstellung kann zu Punktabzug führen.

Anleitung zu dieser Übungsklausur: Diese Aufgaben werden nicht korrigiert. Diese Übungsklausur ist länger als die echte Klausur. Es ist vorgesehen, dass Sie keine Bücher, Notizen oder elektronische Hilfsmittel benutzen. Die Aufgaben werden in einem Zusatz-Repetitorium am 2.3.2021 um 11:00 Uhr besprochen.

Aufgabe 1: Wahr oder falsch?

Kreuzen Sie $\boxed{\text{W}}$ an, wenn die Aussage wahr ist und $\boxed{\text{F}}$, wenn die Aussage falsch ist. Ein richtig gesetztes Kreuz gibt 2 Punkte, kein Kreuz gibt 0 Punkte und ein falsch gesetztes Kreuz gibt -2 Punkte. Insgesamt wird die Aufgabe mit mindestens 0 Punkten bewertet. Sie brauchen keine Begründungen anzugeben.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Beliebige Schnitte offener Mengen sind offen.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Konvergiert (f_n) punktweise, dann konvergiert (f_n) auch gleichmäßig.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Konvergiert (f_n) gleichmäßig, dann ist die Grenzfunktion stetig.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Die Vereinigung zweier konvexer Mengen in $\mathbb{R}^n$ ist konvex.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Die Euklidische Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine konvexe Funktion.

Aufgabe 2: Taylor-Polynom

Berechnen Sie das Taylor-Polynom 2. Grades von $f(x,y) = e^{-x^2+2xy}$ im Punkt $(0,0)$.

Aufgabe 3: Optimierung

Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy + y^2 + 4\,.$$

Aufgabe 4: Limes

Sei $f(x, y) = (5x^2 - 2y^2)/(7x^2 + 3y^2)$ für $(x, y) \neq (0, 0)$. Existiert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5: Differenzierbarkeit

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

auf partielle und totale Differenzierbarkeit in $(0, 0)$.

Aufgabe 6: Tangentialebene

Zeigen Sie, dass die Tangentialebene an die Fläche $x^5 + y^5 + z^5 = 8$ im Punkt $P = (a, b, c)$ durch die Gleichung

$$a^4x + b^4y + c^4z = 8$$

gegeben ist.

Aufgabe 7: Optimierung unter Nebenbedingungen

Warum besitzt die Funktion $f(x, y, z) = x + 3yz$ Maximum und Minimum auf der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$? Benutzen Sie Lagrange-Multiplikatoren, um diese Maximal- und Minimal-Werte zu finden.

Aufgabe 8: Lineare Differentialgleichung

(a) Finden Sie die allgemeine reelle Lösung der Gleichung $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$.

(b) Nach dem Prinzip der Variation der Konstanten, nehmen Sie die Konstanten in Ihrer Lösung zu Teil (a) als variabel an, um die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = t^{-2}e^{-2t} \qquad (t > 0)$$

zu finden.

Aufgabe 9: Integrationsreihenfolge

Sei $I = \int_0^2 \int_{x^2}^5 xy\,dy\,dx$.

(a) Berechnen Sie I.

(b) Zeichnen Sie das Integrationsgebiet im $\mathbb{R}^2$.

(c) Schreiben Sie I als Summe eines oder mehrerer $dx\,dy$-Integrale. Sie brauchen diese Integrale nicht auszuwerten.

Aufgabe 10: Schwerpunkt

Sei $s = (s_x, s_y)$ der Schwerpunkt der (abgeschlossenen) Region $D \subset \mathbb{R}^2$, die eingeschlossen wird vom Einheitskreis und den zwei Radien, die symmetrisch bei den Winkeln $\pm\theta$ von der y-Achse liegen, so dass ein Stück der positiven y-Achse in D liegt.

(a) Skizzieren Sie D.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von D mittels Polarkoordinaten.

(c) Begründen Sie, warum $s_x = 0$, und berechnen Sie s_y mittels Polarkoordinaten.

Aufgabe 11: Kurvenintegral

Die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch $\gamma(t) = (\sin 2t, \cos 3t, t^2)$, das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $v(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma v(x) \cdot dx$ (auch geschrieben als $\int_\gamma v \cdot ds$). Hinweis: Manche Lösungswege sind leichter als andere.

Aufgabe 12: Integration in Kugelkoordinaten

Sei W die Region in $\mathbb{R}^3$, die durch die Bedingungen $0 < z$ und $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ definiert wird. Die Funktion f sei auf W gegeben durch $f(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Kugelkoordinaten sind (wie auf Übungsblatt 11) definiert durch

$$\big(x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi)\big) = \big(r \sin\theta \cos\varphi,\ r \sin\theta \sin\varphi,\ r \cos\theta\big)$$

für $(r, \theta, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi)$. Die Jacobi-Determinante beträgt $r^2 \sin\theta$ (kein Beweis erforderlich).

(a) Skizzieren Sie W.

(b) Drücken Sie W in Kugelkoordinaten aus, d.h. geben Sie die Grenzen für r, θ, φ an.

(c) Drücken Sie f in Kugelkoordinaten als $\tilde{f}(r, \theta, \varphi)$ aus.

(d) Berechnen Sie $\int_W f(x, y, z)\, d(x, y, z)$ in Kugelkoordinaten.

Aufgabe 13: Beweis

Für beliebige $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ hat die Gleichung

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

mindestens eine reelle Lösung (kein Beweis erforderlich). Sei $g(\alpha, \beta, \gamma)$ die kleinste reelle Lösung. Zum Beispiel ist $g(0, 0, 1) = -1$ (kein Beweis erforderlich). Zeigen Sie, dass g in einer Umgebung von $(0, 0, 1)$ stetig differenzierbar ist, und dass $\nabla g(0, 0, 1) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

Aufgabe 14: Beweis

Sei $S := \overline{B}_1(0, 0) \subset \mathbb{R}^2$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe. Zeigen Sie: Ist $f : S \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann ist f Lipschitz-stetig.