

# Mathematik 1 für Naturwissenschaftler\*innen

Anleitung 1 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 06.11.20

---

## 2. Summen und vollständige Induktion<sup>1</sup>

Als erstes wollen wir das Summenzeichen kennenlernen.

Definition [https://youtu.be/b\\_wo-FkX53k](https://youtu.be/b_wo-FkX53k) (3 min) (1)

*OK, und wozu soll das gut sein?* <https://youtu.be/-H6zgHPPoAg> (3 min) (2)

Später werden wir uns auch unendliche Summen anschauen.

Kleiner Ausblick [https://youtu.be/nQRxHr\\_4pns](https://youtu.be/nQRxHr_4pns) (4 min) (3)

**Bestimmen Sie selbst:**

$$\sum_{n=0}^4 (2n+1) \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^5 (2n-1) \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^4 (2\nu+1). \quad (4)$$

Ein paar Rechenregeln, die wir eigentlich schon kennen:

$$\sum_{\nu=n}^N (a_\nu + b_\nu) = \sum_{\nu=n}^N a_\nu + \sum_{\nu=n}^N b_\nu \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=n}^N ca_\nu = c \sum_{\nu=n}^N a_\nu \quad (5)$$

<https://youtu.be/lziHhUEKFng> (3 min)

Indexverschiebung <https://youtu.be/eRo0fUzk8bs> (3 min) (6)

---

Nun lernen wir ein paar konkrete Summen kennen:

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt} \quad \sum_{\nu=1}^n \nu = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{Kleiner Gau\ss}) \quad (7)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ und } \forall n \in \mathbb{N}_0 \text{ gilt} \quad \sum_{\nu=0}^n x^\nu = \begin{cases} n+1 & , \quad x = 1 \\ \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} & , \quad x \neq 1 \end{cases} \quad \left( \begin{array}{c} \text{Geometrische} \\ \text{Summe} \end{array} \right) \quad (8)$$

*Huch! Was sind das für Zeichen?* [https://youtu.be/QRRur\\_00nJA](https://youtu.be/QRRur_00nJA) (3 min) (9)

**Schreiben Sie** die beiden Summen für  $n = 5$  aus.

---

<sup>1</sup>Die Nummerierung orientiert sich, soweit möglich, am Skript.

Wir beweisen die beiden Formeln mit vollständiger Induktion:

Kleiner Gauß     [https://youtu.be/Z\\_XEqcay0YU](https://youtu.be/Z_XEqcay0YU) (4 min)     (10)

*Haben wir da nicht gerade das reingesteckt, was wir zeigen wollten?*  
<https://youtu.be/Uk-g-NvoYW4> (2 min)     (11)

Geometrische Summe     [https://youtu.be/jPz\\_krkHSdE](https://youtu.be/jPz_krkHSdE) (5 min)     (12)

**Berechnen Sie damit:**

$$\sum_{n=2}^{11} 2^{n-1} \quad (13)$$

---

Nicht nur Formeln mit Summen lassen sich schön mit vollständiger Induktion zeigen. Das klappt z.B. auch für die folgende Ungleichung.

$\forall n \geq 4$  gilt      $2^n \geq n^2$      <https://youtu.be/X1oh7T9RBMU> (4 min)     (14)

Und da wir gerade dabei sind, beweisen wir noch schnell, dass alle einfarbigen Pferde die gleiche Farbe haben.

[https://timms.uni-tuebingen.de:/tp/UT\\_20171020\\_002\\_mathnat1\\_0001?t=2201.00](https://timms.uni-tuebingen.de:/tp/UT_20171020_002_mathnat1_0001?t=2201.00) (6 min) (15)

**Überlegen Sie selbst:** Wo war der Fehler?

---

**Damit sind wir für's erste Übungsblatt gerüstet!**

---

Wenn Sie trotzdem zuerst weitere Videos anschauen wollen, dann biete ich Ihnen hier noch alternative Beweise für den Kleinen Gauß und die Geometrische Summe an – diesmal ohne vollständige Induktion.

Kleiner Gauß     <https://youtu.be/cm0nQNLyZcA> (3 min)     (16)

Geometrische Summe     <https://youtu.be/qGIrd87THzA> (3 min)     (17)