

## Mathematik 1 für Naturwissenschaftler\*innen

Anleitung 2 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 11.11.20

---

### 3. Binomische Formel

Das Produktzeichen definieren wir analog zum Summenzeichen,

$$\prod_{j=n}^N a_j. \quad \text{https://youtu.be/mhs0DIq5hxc (2 min)} \quad (1)$$

Ein Spezialfall ist die Fakultät (Produkt der ersten  $n$  natürlichen Zahlen),

$$n! = \prod_{\nu=1}^n \nu, \quad \text{wobei } n \in \mathbb{N}_0. \quad (2)$$

**Bestimmen Sie**  $1!, 2!, 3!, 5!, 10!$  und  $0!$ . (3)

---

Binomialkoeffizienten (benötigen wir unten für die binomische Formel) definieren wir für  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  wie folgt,

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j). \quad \text{https://youtu.be/Z_c9173oksI (3 min)} \quad (4)$$

**Bestimmen Sie**  $\binom{\alpha}{0}$  und  $\binom{\alpha}{1}$  für beliebige  $\alpha$ . (5)

Speziell für ganzzahlige Argumente, genauer

$$\forall n, k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n \geq k, \text{ gilt } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (6)$$

<https://youtu.be/82WLexcg0HQ> (2 min)

**Bestimmen Sie**  $\binom{n}{n}$  und  $\binom{5}{7}$ . (7)

Zwei wichtige Beziehungen:

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \quad \text{https://youtu.be/C9NGmxqCzgE (2 min)} \quad (8)$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \quad \text{https://youtu.be/peq4MS4cycA (4 min)} \quad (9)$$

---

Damit können wir die Binomische Formel angeben und beweisen.

**Satz 1. (Binomi)**

$\forall a, b \in \mathbb{R}$  und  $\forall n \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$(a + b)^n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu}. \quad (10)$$

**Beweis**    <https://youtu.be/dJiu3jbNaK0> (10 min)    (11)

Im Spezialfall  $a = b = 1$  finden wir eine lustige Formel für  $2^n$ . **Probieren Sie's aus!**

---

Ein verwandte Beziehung (*wieso verwandt?*) ist

**Satz 2. (Bernoullische Ungleichung)**

$\forall n \in \mathbb{N}_0$  und  $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1$ , gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad (12)$$

**Beweis**    <https://youtu.be/-DDpQTL4E4> (3 min)    (13)

**Überlegen Sie:** Wo haben wir benötigt, dass  $x$  nicht kleiner als  $-1$  ist?