Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 20/21

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 3 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 13.11.20

---

4. Funktionen

Eine Funktion besteht aus Definitionsmenge und Abbildungsvorschrift:

$$\begin{aligned} f : D &\to Z \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \qquad \text{https://youtu.be/WagVaWUBJ3A (3 min)} \tag{1}$$

Das Bild einer Funktion ist die Menge aller Funktionswerte:

$$f(D) = \{ y \in Z \mid \exists\, x \in D, \text{ so dass } f(x) = y \} \tag{2}$$

https://youtu.be/3oyll-BjuUs (5 min)

Geben Sie die Bilder der Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 1 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} g : [1,2] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 1 \end{aligned} \qquad \text{an.} \tag{3}$$

Wenn Bild und Definitionsbereich zweier Funktionen zusammenpassen, so können wir sie nacheinander ausführen. Wir sprechen dann von Verkettungen.

Notation und Beispiele... https://youtu.be/h2XyzPwmpw8 (6 min)
...mit Bemerkungen zu Intervallen und anderen Teilmengen von $\mathbb{R}$. (4)

Bestimmen Sie $(g \circ f)(x)$ für

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = x^3 + 1 \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } g(x) = x^2 - 2\,. \tag{5}$$

Weitere Bespiele. https://youtu.be/YaHwkEGLC8g (5 min) (6)

4.1 Folgengrenzwerte

Folgen sind Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$, für die wir eine andere Schreibweise (mit Index) verwenden:

Indexschreibweise https://youtu.be/NdpB4V52Z5g (2 min) (7)

Manche Folgen haben einen

Grenzwert bzw. Limes. https://youtu.be/Uic__YO1NhQ (1 min) (8)

Bevor ich Sie jetzt mit einer präzisen Definition verwirre, versuchen Sie mal die folgenden Grenzwerte zu bestimmen, zu berechnen oder zu erraten (falls sie überhaupt existieren):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} (-1)^n\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} n^2\,. \tag{9}$$

Nun definieren wir's mal anständig.

Definition: (Grenzwert)
Eine Folge (a_n) konvergiert gegen den Grenzwert α, wenn gilt:
Für jedes $\varepsilon > 0$ $\exists$ ein $N(\varepsilon)$, so dass $|a_n - \alpha| < \varepsilon \ \forall\ n \geq N(\varepsilon)$.
Wir schreiben dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

https://youtu.be/oGzO_bEQzOE (3 min) (10)

Versuchen Sie damit zu begründen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.

Meistens wollen wir aber gar nicht mit der Definition arbeiten, sondern lieber aus einigen bekannten Grenzwerten auf weitere schließen. Dabei helfen die folgenden...

Rechenregeln für Grenzwerte

Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ so gilt:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = \alpha\beta$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{\alpha} \quad$ falls $\quad \alpha \neq 0$

Merke: *Auseinanderziehen erlaubt, falls alles konvergent ist.*

Diese Rechenregeln könnten wir nun ausgehend von der Definition beweisen, aber vielleicht schauen wir sie uns lieber anhand eines Beispiels in Aktion an:

https://youtu.be/q9sWl1wlNTY (5 min) (11)

Bestimmen Sie selbst

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n^5}{1+n^5}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n+20}{n^2} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1+n^5}{1-n^4}\,. \tag{12}$$