Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 20/21

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 4 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 18.11.20

4.2 Funktionsgrenzwerte

Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder mit kleinerer Definitionsmenge) definieren wir $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ genau wie bei Folgengrenzwerten:

https://youtu.be/UvK5Wye2k6Y (1 min) (1)

Sind wir an $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ interessiert, machen wir es so ähnlich:

https://youtu.be/AtJLDyvrndE (3 min) (2)

Hier nochmal die **Definition** aus dem Video:

Eine Funktion f konvergiert für $x \to x_0$ gegen den Grenzwert α, wenn gilt:
Für jedes $\varepsilon > 0$ $\exists$ ein $\delta(\varepsilon)$, so dass $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ $\forall\, x \neq x_0$ mit $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$.
Wir schreiben dann $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha$.

Wichtig ist vor allem, dass der Grenzwert an der Stelle x_0 nur davon abhängt, wie sich die Funktion *in der Nähe von* x_0 verhält, $f(x_0)$ ist dem Grenzwert dagegen egal.

Wir zeigen einmal mit ε und δ, dass tatsächlich

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4 \qquad \text{https://youtu.be/Bh2XY9SjXys (4 min)} \tag{3}$$

gilt – aber, wenn uns das einen Knoten ins Hirn macht, dann vergessen wir es erst mal. . .

. . . und stellen lieber fest: Es gelten die gleichen **Rechenregeln** wie bei Folgengrenzwerten:

Ist $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \beta$ so gilt:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \alpha + \beta$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)\, g(x)\big) = \alpha\beta$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\alpha}$ falls $\alpha \neq 0$

Merke: *Auseinanderziehen erlaubt, falls alles konvergent.*

Beispiele für Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 \qquad \text{https://youtu.be/ig52V5DwvXs (2 min)} \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty \qquad \text{https://youtu.be/we_n3xh-om4 (3 min)} \tag{5}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \quad \text{existiert nicht} \qquad \text{https://youtu.be/Nq9tSvraWZ8 (2 min)} \tag{6}$$

Und wenn wir im letzten Beispiel nur von links oder nur von rechts drauf schauen?

https://youtu.be/1q08CWPN7_A (3 min) (7)

Bestimmen Sie selbst

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^2 + 7x}{2x - x^3}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - x^2 + 7x}{2x - x^3} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - x^2 + 7x}{2x - x^3}\,. \tag{8}$$

4.3 Stetigkeit

Wir sagen f ist stetig an der Stelle x_0, wenn gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Warum ist das toll? https://youtu.be/6RKWsDxB01A (2 min) (9)

Weiter sagen wir f ist stetig auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, wenn f in jedem $x_0 \in I$ stetig ist.

Analog zu den Rechenregeln für Grenzwerte gilt:

1. Sind f und g stetig auf $I \subseteq \mathbb{R}$, so sind auch $f + g$, αf $(\alpha \in \mathbb{R})$ und fg stetig. Außerdem ist $\dfrac{f}{g}$ stetig $\forall\, x \in I$ mit $g(x) \neq 0$.
2. Sind $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ stetig auf I bzw. J, und ist $g(J) \subseteq I$, dann ist auch $f \circ g$ stetig auf J.

Beispiele:

Monome & Polynome sind überall stetig, rationale Funktionen zumindest überall dort, wo der Nenner nicht Null ist. (10)

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \leq 2 \\ x\,, & x > 2 \end{cases}$$ https://youtu.be/XOeo0rGN_S0 (3 min) (11)

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x < 1 \\ x\,, & x \geq 1 \end{cases}$$ https://youtu.be/QsEbtwmUP20 (2 min) (12)

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$ https://youtu.be/dWSU3Ai7fO0 (2 min) (13)

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$ https://youtu.be/fK3xjIKp27I (2 min) (14)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und gegebenenfalls auf stetige Fortsetzbarkeit:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x\,, & x \geq 0 \\ -x\,, & x < 0 \end{cases} \tag{15}$$

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} \tag{16}$$