Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 20/21

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 5 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 20.11.20

4.4 Asymptoten

Nähert sich eine Funktion einer Geraden beliebig nahe an, so nennen wir die Gerade eine Asymptote der Funktion (bzw. des Funktionsgraphs). Genauer:

f hat eine **waagrechte Asymptote** $y = a$ oder $y = b$, wenn gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b\,. \tag{1}$$

f hat eine **senkrechte Asymptote** (Polstelle) $x = a$, wenn gilt

$$\lim_{x\to a+} |f(x)| = \infty \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x\to a-} |f(x)| = \infty\,. \tag{2}$$

f hat die **schiefe Asymptote** $g(x) = ax + b$ (mit $a \neq 0$), wenn gilt

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0\,. \tag{3}$$

Beispiele: (Suchen Sie zuerst selbst Asymptoten, schauen Sie erst dann die Videos an.)

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \tag{4}$$ https://youtu.be/T_em0zCGKWs (1 min)

$$f(x) = \frac{2x^2+20}{x+3x^2} \tag{5}$$ https://youtu.be/KWRHFL2kpSg (2 min)

$$f(x) = \frac{2x^2+20}{x+1} \tag{6}$$ https://youtu.be/bZ4yRFXgEwA (5 min)

4.5 Differentiation

Wir werden gleich eine alternative Definition der Ableitung kennen lernen (nicht mit Differentialquotient sondern mit Klein-o). Wiederholen Sie im Vorfeld, was Sie bereits über Ableitungen gelernt haben. Die folgende Checkliste hilft.

☐ Ich kenne die Definition der Ableitung als Differentialquotient (Formel) und die Interpretation als Tangentensteigung (Skizze).[1]

https://timms.uni-tuebingen.de/tp/UT_20171108_002_mathnat1_0001?t=457.00 (3 min) (7)

https://timms.uni-tuebingen.de/tp/UT_20171108_002_mathnat1_0001?t=736.00 (6 min) (8)

Hübsche Animation: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Tangent_function_animation.gif

Skills auf www.khanacademy.org: *Derivative as slope of curve, Visualizing derivatives, Differentiability at a point: graphical.*

---

[1] Die `timms`-Links führen zu den richtigen Startzeitpunkten innerhalb der Videos. Die meisten Videos sind aber viel länger als die angegebene Zeit.

☐ Ich kann mithilfe des Differentialquotienten die Ableitungen von $f(x) = x^2$ und $g(x) = \frac{1}{x}$ bestimmen.

☐ Ich kenne verschiedene Schreibweisen: $f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$, $f''(x)$, $f^{(2)}(x)$, ...

https://timms.uni-tuebingen.de/tp/UT_20171108_002_mathnat1_0001?t=583.00 (1 min) (9)

☐ Ich kenne die Ableitung von Potenzen: $f(x) = x^n$, $f'(x) = ?$

https://timms.uni-tuebingen.de/tp/UT_20171108_002_mathnat1_0001?t=1376.00 (7 min) (10)

☐ Ich kenne Ableitungsregeln für Summen, Produkte und Verkettungen:
Seien f und g differenzierbar, was ist $(f+g)'$, $(fg)'$ und $(f \circ g)'(x)$?

https://timms.uni-tuebingen.de/tp/UT_20171108_002_mathnat1_0001?t=2582.00 (4 min) (11)

☐ Ich kann die Quotientenregel mithilfe von Produkt- und Kettenregel herleiten:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Differenzierbarkeit als Approximierbarkeit durch eine Gerade

Wir sagen, f ist an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn sich f in der Nähe von x_0 gut durch eine Gerade annähern lässt. Die Steigung dieser Geraden nennen wir $f'(x_0)$, die Ableitung an der Stelle x_0. Diese Gerade ist dann die Tangente in x_0.

Aber was heißt "gut annähnern"? https://youtu.be/-XrQHNR8bnU (3 min) (12)

Definition: (Klein-o)
Wir sagen, f ist ein Klein-o von g im Limes $x \to x_0$ und schreiben dafür

$$f(x) = o\big(g(x)\big)\,,\ x \to x_0 \qquad \text{genau dann, wenn gilt} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0\,. \tag{13}$$

Bemerkung: Wenn hier z.B. beide Funktion gegen Null gehen, so bedeutet das, dass f *schneller* gegen Null geht als g.

Beispiele:

$$x^2 = o(x)\,,\ x \to 0$$

$$x^3 = o(x)\,,\ x \to 0$$ https://youtu.be/UgD-Cwd9CQs (3 min) (14)

$$x = o(x^2)\,,\ x \to \infty$$

Und es gilt auch: $xo(x) = o(x^2)\,,\ x \to 0$

Huch! Was heißt das überhaupt? https://youtu.be/lBor-l_uVtY (3 min) (15)

Jetzt können wir Differenzierbarkeit neu definieren.

Definition: (Differenzierbarkeit)
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $x_0 \in I$. $f : I \to \mathbb{R}$ heißt diffbar in x_0, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)\,,\ x \to x_0\,. \tag{16}$$

Wir schreiben dann $a = f'(x_0)$ und nennen a die Ableitung von f an der Stelle x_0.

Lemma 4. *$f'(x_0)$ aus der Definition ist gleich dem Differentialquotient an der Stelle x_0.*

Beweis https://youtu.be/Px7hT81-IkA (4 min) (17)