Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 20/21

# Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 6 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 25.11.20

---

## 4.5 Differentiation (Fortsetzung)

*Jetzt soll Klein-o aber mal sein Potential entfalten!*

**Regel von l'Hospital.** (eigentlich von Bernoulli)
Ist $f(x_0) = 0 = g(x_0)$, und sind $f$ und $g$ diffbar mit $g'(x_0) \neq 0$, dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \, . \qquad (1)$$

https://youtu.be/PaSlV0WnBlA (3 min)

Übrigens: Das klappt nicht nur bei "$\frac{0}{0}$", sondern auch bei "$\frac{\infty}{\infty}$".

**Kettenregel.** Sei $f = g \circ h$. Ist $h$ diffbar in $x_0$ und ist $g$ diffbar in $h(x_0) =: y_0$, dann gilt

$$f'(x_0) = g'\big(h(x_0)\big) \cdot h'(x_0) \, . \qquad (2)$$

https://youtu.be/1AQ7Gm4DS2c (8 min)

**Können Sie** auf änliche Weise die Ableitung von $f \cdot g$ ausrechnen? (Produktregel)

---

## 4.6 Die Exponentialfunktion

Für die Folge

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (3)$$

können wir mit etwas Bernoulli und Binomi zeigen,[1] dass $\forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$2 \leq a_n \leq 3 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} \geq a_n \, . \qquad (4)$$

Daraus folgt, dass der Grenzwert existiert (und zwischen 2 und 3 liegt). Wir nennen ihn e, die Eulerscher Zahl:

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \, . \qquad (5)$$

Ähnlich lässt sich zeigen, dass $\forall\, x \in \mathbb{R}$ auch $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ existiert. Wir nennen das Ergebnis die Exponentialfunktion,

$$\exp(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad (6)$$

**Überlegen Sie:** Welchen Wert haben demnach $\exp(0)$ und $\exp(1)$?

---

[1] Die Details lassen wir hier weg, aber im Skript stehen sie.

Nun machen wir **drei Beobachtungen:** $\forall\, x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x) \geq 1 + x \qquad \texttt{https://youtu.be/XShRHBUEBMg}\ (2\,\text{min}) \tag{A}$$

$$\exp(x) \leq x\exp(x) + 1 \qquad \texttt{https://youtu.be/ap62i76mmIY}\ (3\,\text{min}) \tag{B}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n^2}\right)^n = 1 \qquad \texttt{https://youtu.be/xt\_cqMCfgZU}\ (4\,\text{min}) \tag{C}$$

Mithilfe dieser Beobachtungen können wir zeigen, dass exp eine hübsche Funktion mit den folgenden Eigenschaften ist.

**Satz 5. (Eigenschaften der Exponentialfunktion)**

(i) $\exp(0) = 1\,, \quad \exp(1) = \mathrm{e}$

(ii) $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$ *(Funktionalgleichung)*
https://youtu.be/Uhaaql7qKNk (2 min)

(iii) $\exp(x) > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ https://youtu.be/J1z7UEnFlhQ (2 min)

(iv) exp *ist streng monoton wachsend, d.h.*

$$x > y \quad \Rightarrow \quad \exp(x) > \exp(y) \qquad \texttt{https://youtu.be/qvbDkDnbL0w}\ (1\,\text{min})$$

(v) exp *ist stetig* $\forall\, x \in \mathbb{R}$ https://youtu.be/cXvwkH10YD8 (3 min)

(vi) exp *ist diffbar* $\forall\, x \in \mathbb{R}$ *mit* $\exp' = \exp$
https://youtu.be/iVH99m_nIlE (4 min)

(vii) $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ *und* $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$
https://youtu.be/olFF6w8l-64 (1 min)

(viii) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty$ *und* $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^n \exp(x) = 0$

**Bemerkung:** Wegen (ii) schreiben wir auch $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ und nennen exp die e-Funktion.

**Zeigen Sie** Eigenschaft (viii). Die l'Hospitalsche Regel hilft.

**Zeichnen Sie** den Graph von exp und erklären Sie daran möglichst viele Eigenschaften aus dem Satz.