Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 20/21

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 8 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 02.12.20

4.9 Weitere elementare Funktionen

Für $a > 0$ definieren wir die allgemeine Exponentialfunktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^+$ durch $a^x := \mathrm{e}^{x \log a}$. Es gilt dann

$$\log(a^x) = x \log a \,. \qquad \text{https://youtu.be/3\_3N78ZNmxY (1 min)} \tag{1}$$

Für $a \neq 1$ ist diese Funktion umkehrbar. Die Umkehrfunktion heißt Logarithmus zur Basis a,

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\,, \quad \log_a(x) = \frac{\log x}{\log a}\,. \qquad \text{https://youtu.be/GcK8YutoG6g (2 min)} \tag{2}$$

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir die allgemeine Potenz als Funktion von $\mathbb{R}^+$ nach $\mathbb{R}^+$ durch $x^\alpha := \mathrm{e}^{\alpha \log x}$. Für $\alpha \neq 0$ ist die Funktion umkehrbar, mit Umkehrfunktion

$$x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}\,, \qquad \text{https://youtu.be/syZ1\_\_RjIzU (2 min)} \tag{3}$$

Für $x \in \mathbb{R}^+$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelten folglich die **Rechenregeln**

- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \, x^\beta$
- $\log(x^\alpha) = \alpha \log x$

4.10 Trigonometrische Funktionen

Wiederholen Sie, was Sie bereits über *Sinus*, *Kosinus* und *Tangens* gelernt haben. Die folgende Checkliste hilft.

- ☐ Ich kenne die Definition von sin, cos und tan in rechtwinkligen Dreiecken.
- ☐ Ich kann sin, cos und tan am Einheitskreis erklären.
- ☐ Ich kann erklären, warum $\forall\, x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
  HINWEIS: Pythagoras am Einheitskreis.
- ☐ Ich kann am Einheitskreis erklären, warum $\sin(-x) = -\sin x$. Was gilt für $\cos(-x)$?
- ☐ Ich kenne spezielle Werte von sin, cos und tan, z.B. an den Stellen $0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$.
- ☐ Ich kann die Graphen von sin und cos zeichnen (in ein Diagramm), und auch den Graph von tan (in ein anderes Diagramm).
- ☐ Ich kenne die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus:
  (i) $\sin(x + y) = \ldots$ (ii) $\cos(x + y) = \ldots$
  Schreiben Sie die Additionstheoreme auch im Spezialfall $y = x$ auf, und **zeigen Sie** damit: $1 + \cos(2x) = 2\cos^2(x)$.

- ☐ Ich kenne die Ableitung des Sinus: $\sin'(x) = \cos x$.
  Ich kann erklären, wie daraus $\cos'(x) = -\sin x$ folgt.
  HINWEIS: $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ – warum?

Wo schaue ich nach, wenn ich etwas nicht kenne bzw. mich nicht mehr erinnere?

- ▶ Vorlesungsvideos:
  https://timms.uni-tuebingen.de/tp/UT_20171124_001_mathnat1_0001 (ab 00:21:52)
  https://timms.uni-tuebingen.de/tp/UT_20171124_002_mathnat1_0001 (bis 00:34:00)
  Klicken Sie im Video unten rechts auf ≡, um ein Inhaltsverzeichnis zu bekommen, von dem Sie direkt an die gewünschte Stelle springen können.
- ▶ Skript: Abschnitt 4.10.
- ▶ KHANACADEMY: Trigonometrie-*Skills* auf Übungsblatt 4.

Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gilt

$$\sin x < x < \tan x\,. \qquad \text{https://youtu.be/6AIcXdrktVg (2 min)} \tag{4}$$

Berechnen Sie damit $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}$.

Die Umkehrfunktion des Sinus heißt *Arcussinus* und hat viele Zweige. Für den Hauptzweig gilt:

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \qquad \text{https://youtu.be/ggqKuk4H3xM (3 min)} \tag{5}$$

Die Ableitung können wir mit dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion bestimmen:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{https://youtu.be/n6AMvlGsS1c (3 min)} \tag{6}$$

Bestimmen Sie analog die Ableitung des Hauptzweigs des *Arcuskosinus*,

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]\,. \tag{7}$$

Überlegen Sie: Wo müssen wir den Tangens definieren, damit er bijektiv ist? Den Hauptzweig wählen wir so, dass 0 in der Definitionsmenge des Tanges enthalten ist.

Jetzt schauen wir uns noch die Ableitungen des Tangens und des *Arkustangens* an:

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad \text{https://youtu.be/Y5bGhX6S6B4 (2 min)} \tag{8}$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \text{https://youtu.be/pBi7PqrespQ (1 min)} \tag{9}$$

Zeichnen Sie die Graphen des Arkustangens und seiner Ableitung.