Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 20/21
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 9 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 04.12.20

4.11 Potenzreihen

Wir spielen mit der geometrischen Summe aus Anleitung 1 und erhalten die

$$\textit{geometrische Reihe:} \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} = \frac{1}{1-x} \quad \forall\, |x| < 1\,. \tag{1}$$

https://youtu.be/GmZMn-s51CQ (2 min)

Übrigens, für $x = \frac{3}{4}$ haben wir die geometrische Reihe bereits als Ausblick auf Anleitung 1 gesehen.

Können Sie ähnliche Formeln wie (1) für

$$\frac{1}{1-x^2}\,, \quad \frac{1}{1+x} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2-x} \quad \text{angeben?} \tag{2}$$

Hinweis: Ersetzen Sie x in (1) geeignet.

Eine Summe mit Grenze ∞ nennen wir Reihe. Speziell interessieren uns jetzt

Potenzreihen. https://youtu.be/7Ar_0FVfbws (2 min) (3)

Wozu könnte das gut sein? https://youtu.be/Cgm09VWI6pw (2 min) (4)

Idee der *Taylorreihe* einer beliebigen Funktion:

Idee in Bildern https://youtu.be/fSgOysTvWy4 (3 min) (5)

Quadratischer Term: $\frac{1}{2}f''(x_0)$ https://youtu.be/veR8Hj_-3Fc (3 min) (6)

Alle Terme https://youtu.be/M20xIh5dIHs (6 min) (7)

Dann nennen wir

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}\,(x-x_0)^{\nu} \qquad \text{das } n\text{-te Taylorpolynom} \tag{8}$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}\,(x-x_0)^{\nu} \qquad \text{die (formale) Taylorreihe} \tag{9}$$

von f um x_0, und wir fragen uns:

- ▶ Ist das Taylorpolynom eine gute Näherung für $f(x)$?
- ▶ Konvergiert die Taylorreihe?

Antworten liefert...

Satz 8. (Taylor)
Sei $f : I \to \mathbb{R}$, $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $n + 1$ mal diffbar. Dann gilt für $x, x_0 \in I$

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^\nu + R_n(x) , \tag{10}$$

und für $x > x_0$ $\exists\, \xi \in (x_0, x)$ (für $x < x_0$ $\exists\, \xi \in (x, x_0)$) mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} . \tag{11}$$

R_n heißt (Lagrangesches) Restglied, x_0 heißt Entwicklungspunkt.

... den wir zunächst nicht beweisen wollen.

Hilfe! Was sagt uns der Satz? https://youtu.be/PpmJQYlm-3A (5 min) (12)

Schreiben Sie die Taylorreihe der Exponentialfunktion um Null auf, also für $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $x_0 = 0$. Im Livestream werden wir zeigen, dass diese Reihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen $\exp(x)$ konvergiert.