Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 20/21

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 10 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 09.12.20

4.11 Potenzreihen (Fortsetzung)

Bis jetzt kennen wir zwei wichtige Potenzreihen,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \forall\,|x|<1 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

Ähnlich wie für exp finden wir die Reihen für Sinus und Kosinus,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$

https://youtu.be/BmErLfUQ1Vc (4 min)

Warum $\forall\, x \in \mathbb{R}$*?* https://youtu.be/YNk9Cr_94dQ (2 min) (3)

Weitere Reihen besorgen wir uns lieber nicht durch ν-mal Ableiten, sondern indem wir sie aus bekannten Reihen zusammensetzen:

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n \quad \forall\,|x|<1 \tag{4}$$

https://youtu.be/JbMwjoOvcl0 (4 min)

Können Sie analog eine Reihe für $\arctan x$ um Null finden?

Weiter geht's mit

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

https://youtu.be/I1OuuDI7r1Y (2 min)

und

$$\frac{\mathrm{e}^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{nu=0}^{n} \frac{x^n}{\nu!} \quad \forall\,|x|<1\,. \tag{6}$$

Die ersten paar Terme... https://youtu.be/yqvWf6eG4jI (3 min)
...alle Terme (Cauchy-Produkt) https://youtu.be/oSyTOSVt1gQ (5 min)

Wozu sind diese ganzen Reihen eigentlich gut? Zum Beispiel um Grenzwerte zu berechnen!

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin^4(x)}{(1-\cos x)^3} \qquad \text{https://youtu.be/ODmH3OZdiic (3 min)} \tag{7}$$

Bestimmen Sie analog

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1-e^x)^3}{(\cos x - 1)^2}\,. \tag{8}$$

Wie entwickeln wir um eine andere Stelle als Null?

$$\frac{1}{1-x} \quad \text{um} \quad x_0 = 5 \qquad \text{https://youtu.be/xL6izAEDRvA (4 min)} \tag{9}$$

Die Reihe für $\log(1+x)$ oben war eigentlich eine Entwicklung von $\log x$ um $x_0 = 1$. **Können Sie** das in der Form

$$\log x = \sum_{n=\ldots} \ldots (x-1)^n \qquad \text{ausschreiben?} \tag{10}$$

Na gut, ein letztes Mal bestimmen wir noch eine Taylorreihe durch ν-faches Ableiten.
Sei $f(x) = (1+x)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. **Bestimmen Sie** $f^{(\nu)}(0)$.
Das führt zur binomischen Reihe,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu \quad \forall\, |x| < 1 \tag{11}$$

(Konvergenzbereich ohne Beweis). Spezialfälle: Für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ erhalten wir die binomische Formel, für $\alpha = -1$ die geometrische Reihe. **Sehen Sie** wie?

Erinnern Sie sich daran, wie Sie in der Schule lokale Extrema (Minima und Maxima) bestimmt haben? Da gab es Kriterien (ein notwendiges und ein hinreichendes) die mit der ersten und zweiten Ableitung einer Funktion zu hatten. **Können Sie** mithilfe der Taylorreihe

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots \tag{12}$$

begründen, wie es zu diesen Bedingungen kam, also wann f an der Stelle x_0 ein Minimum oder Maximum hat?
