Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 20/21
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 11 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 11.12.20

---

5 Vektorrechnung

Was ist ein Vektor? Wenn Sie jetzt an Pfeile denken und dann vielleicht noch ein Bild davon vor Augen haben, was es bedeutet, solche Pfeile zu addieren oder mit einer Zahl zu multiplizieren, dann ist das genau richtig. Wir fassen diese Vorstellung im Begriff des Vektorraums zusammen.

5.1 Vektorräume

Definition: https://youtu.be/WSHVS4YtRRM (6 min) (1)

Bemerkungen: https://youtu.be/eHfn5Ht1bVA (2 min) (2)

Beispiele:

- $\mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$ (d.h. $V = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{R}$)
- Ebene $\mathbb{R}^2$ oder Raum $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$. Allgemeiner:

  $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$. https://youtu.be/b-5CLpaYc-c (1 min) (3)

  mit komponentenweiser Vektor-Addition und skalarer Multiplikation.
- Raum der Polynome (beliebigen Grads) über $\mathbb{R}$

  https://youtu.be/j0frUvbua7I (4 min) (4)

  mit punktweiser Vektor-Addition und skalarer Multiplikation.
- Analog: $C([a, b])$ über $\mathbb{R}$, der Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$.

5.2 Lineare Unabhängigkeit

Definition: (Lineare Unabhängigkeit & lineare Abhängigkeit)
Sei V ein Vektorraum. Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in V$ heißen *linear unabhängig* (l.u.) genau dann, wenn gilt:

$$\text{Aus} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{a}_j = \vec{0} \quad \text{folgt} \quad \lambda_j = 0 \ \forall\, j = 1, \ldots, n\,. \tag{5}$$

Sonst heißen sie *linear abhängig* (l.a.).

Spezialfälle:

$n = 1$ https://youtu.be/5PCDB7hz2q8 (2 min) (6)

$n = 2$ https://youtu.be/bB9tpLiWAKM (3 min) (7)

Erklären Sie: Sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ l.u., so ist Koeffizientenvergleich möglich, d.h.

$$\text{aus} \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{a}_j = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \vec{a}_j \qquad \text{folgt} \qquad \lambda_j = \mu_j \quad \forall\, j = 1, \ldots, n\,. \tag{8}$$

Bemerkung: Sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ l.u. so spannen sie den gesamten $\mathbb{R}^n$ auf, d.h. für jeden Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ gibt es eindeutig bestimmte λ_j, so dass

$$\vec{b} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{a}_j\,. \tag{9}$$

Wie finden wir diese λ_j? Durch Lösen eines linearen Gleichungssystems!

Beispiel:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Überlegen Sie:

a) Sind die Vektoren l.u.?

b) Können wir z.B. $\vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ als Linearkombination (LK) der $\vec{a}_j$ darstellen? Wenn ja, wie?

Falls Sie (10) läppisch einfach fanden, dann denken Sie über folgende Fragen nach. Falls Sie (10) schwierig genug fanden, dann ignorieren Sie die folgenden Fragen vielleicht zunächst.

Zusatzaufgabe: Wir betrachten $C(\mathbb{R})$, den Vektorraum der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Sind die Vektoren f_1, f_2 und f_3 in den folgenden Beispielen l.a. oder l.u.?

$$\begin{aligned} &\text{a)} \qquad f_1(x) = \mathrm{e}^x\,, \quad f_2(x) = \mathrm{e}^{-x}\,, \quad f_3(x) = \sinh(x) \\ &\text{b)} \qquad f_1(x) = \mathrm{e}^x\,, \quad f_2(x) = \mathrm{e}^{-x}\,, \quad f_3(x) = 1 \end{aligned} \tag{11}$$
