Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 20/21

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 12 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 16.12.20

5.3 Lineare Gleichungssysteme

Mit $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$ heißt

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{a}_j = \vec{b} \tag{1}$$

lineares Gleichungssystem (LGS) mit m Gleichungen für n Unbekannte.
Das LGS heißt homogen, falls $\vec{b} = \vec{0}$ und inhomogen, falls $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Beispiel:

https://youtu.be/6CmZEgqSBLA (1 min) (2)

Die folgende Schreibweise betont die *Linearität*:
Wir definieren die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch

$$L(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{a}_j \,, \qquad \text{wobei} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} , \tag{3}$$

und schreiben das LGS kurz als

$$L(\vec{x}) = \vec{b} \,. \tag{4}$$

Im obigen Beispiel:

https://youtu.be/gGMqC3PQGUk (1 min) (5)

Was heißt jetzt Linearität? Für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$L(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda L(\vec{x}) + \mu L(\vec{y}) \,. \tag{6}$$ https://youtu.be/39r48VJTv2c (1 min)

Und was bringt Linearität? Damit verstehen wir die Struktur der Lösungsmenge

$$\mathscr{L}_{\vec{b}} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, L(\vec{x}) = \vec{b} \right\} \tag{7}$$

besser, denn es gilt:

Satz 9. *Sei $\vec{b} \neq \vec{0}$. Wenn $\vec{x}_1^h, \vec{x}_2^h \in \mathscr{L}_{\vec{0}}$ und $\vec{y}^p \in \mathscr{L}_{\vec{b}}$, dann gilt:*

(i) $\lambda\, \vec{x}_1^h + \mu\, \vec{x}_2^h \in \mathscr{L}_{\vec{0}} \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

(ii) $\vec{y} \in \mathscr{L}_{\vec{b}} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \vec{x} \in \mathscr{L}_{\vec{0}}$ *mit* $\vec{y} = \vec{y}^p + \vec{x}$.

Beweis:

Linearität bei der Arbeit. https://youtu.be/INeNTsG8Tzc (5 min) (8)

Aber was bringt das denn? https://youtu.be/ScPe1f7svyg (1 min) (9)

Wie lösen wir so ein LGS ganz konkret?
Wir bringen es auf Zeilenstufenform (ZSF) und lesen die Lösung(en) ab!

Übersichtlicher wird das mit einer

$$\text{Kurzschreibweise.} \qquad \texttt{https://youtu.be/Q6K1F7-TrTo}\ (2\,\text{min}) \tag{10}$$

Dann starten wir mit

$$\left(\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n \;\middle|\; \vec{b} \right) \tag{11}$$

und formen um, bis das LGS so aussieht (ZSF):

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
\blacksquare & * & * & * & \cdots & & * & \cdots & * & & \tilde{b}_1 \\
0 & 0 & \blacksquare & * & \cdots & & * & \cdots & * & & \tilde{b}_2 \\
0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & \cdots & * & \cdots & * & & \tilde{b}_3 \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & & & & 0 & \blacksquare & * & \cdots & * & & \tilde{b}_r \\
0 & & & & & & 0 & \cdots & 0 & & \tilde{b}_{r+1} \\
0 & & & & & & 0 & \cdots & 0 & & \vdots \\
0 & & & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & & \tilde{b}_m
\end{array} \right)
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} r \text{ Zeilen} \\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} m-r \text{ Zeilen}
\end{array} \tag{12}$$

Kennzeichen der ZSF:

a) $\blacksquare$ sind Zahlen $\neq 0$.

b) $*$ sind irgendwelche Zahlen.

c) Links (und unterhalb) von $\blacksquare$ stehen nur Nullen.

d) Stufen von $\blacksquare$ zu $\blacksquare$: eine Zeile nach unten, mindestens eine Spalte nach rechts.

$$\texttt{https://youtu.be/1F1qlAEMg-c}\ (3\,\text{min}) \tag{13}$$

Lösung des LGS:

a) Zeile der Form $(0 \cdots 0 | \tilde{b}_j)$ mit $\tilde{b}_j \neq 0$ bedeutet: LGS hat keine Lösung.

b) Spalten ohne $\blacksquare$ entsprechen frei wählbaren Variablen (parametrisiere so die Lösung).

c) Variablen, die Spalten mit $\blacksquare$ entsprechen, sind durch die Zeile, in der $\blacksquare$ steht, festgelegt (von unten nach oben arbeiten).

$$\texttt{https://youtu.be/7lb5X1KYUmY}\ (3\,\text{min}) \tag{14}$$

Überlegen Sie: Wie viele (und welche) Lösungen haben die LGSe mit den folgenden ZSFen?

$$\text{a)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \qquad \text{b)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \qquad \text{c)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \tag{15}$$