Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 20/21

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 13 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 18.12.20

5.4 Unterräume, Dimension und Basis

Definition: (Dimension)
Sei V ein Vektorraum. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in V heißt Dimension von V, $\dim V$.

Beispiel: $\dim \mathbb{R}^n = n$ https://youtu.be/RZf1_DEw01E (4 min) (1)

Definition: (Unterraum)
Sei V ein Vektorraum (über K). U heißt Unterraum von V, falls gilt:
(i) $U \subseteq V$, und
(ii) U ist ein Vektorraum (über K).

Bemerkungen:

- Abgeschlossenheit
- $\dim U \leq \dim V$

https://youtu.be/Ag0rdXxsjXE (2 min) (2)

Beispiele:

- triviale Unterräume
- $\mathscr{L}_{\vec{0}}$

https://youtu.be/44Ohqk4ZWPI (4 min) (3)

Definitionen: (Lineare Hülle, Erzeugendensystem, Basis)
Sei V ein Vekorraum über K und $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in V$.

- Die Menge aller Linearkombinationen,
$$\operatorname{span}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \left\{ \vec{x} \in V \,\middle|\, \vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{a}_j \,, \ \ \lambda_j \in K \right\} , \tag{4}$$
heißt *lineare Hülle* (oder Aufspann) von $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.
- Die Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ heißen *Erzeugendensystem* von V, falls gilt
$$\operatorname{span}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = V \,. \tag{5}$$
Wir sagen dann auch, sie spannen V auf.
- Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ l.u. und bilden ein Erzeugendensystem von V, so nennen wir sie eine *Basis* von V.

Bemerkungen:

- $\operatorname{span}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ ist ein Unterraum von V.
- Die Anzahl der Vektoren einer Basis von V ist gleich $\dim V$.

Beispiele:

- $$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^2 \tag{6}$$
  https://youtu.be/pNw8uco9PdE (2 min)

- Die kanonischen Einheitsvektoren $\vec{e}_j \in \mathbb{R}^n$.

  https://youtu.be/fe4yTOoNxqI (2 min) (7)

Überlegen Sie: Bilden die folgenden Vektoren ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$? Falls ja, sind sie auch eine Basis?

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^3 \tag{8}$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathscr{L}_0$ von

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right). \tag{9}$$

Was ist $\dim \mathscr{L}_0$? Nennen Sie die Spalten des LGS $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_4$.
Was ist die Dimension von $\operatorname{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_4)$?

Satz 10.
Seien $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$. Die Dimension von $\operatorname{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ ist gleich der Anzahl der $\blacksquare$ in der Zeilenstufenform von

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n & \vec{0} \end{array}\right). \tag{10}$$

Begründung:

https://youtu.be/FnSrunJqSAQ (4 min) (11)

Bemerkung:

Dimensionssatz für lineare Abbildungen
https://youtu.be/yUKlDrKeFH0 (4 min) (12)

Verständnisaufgabe: Betrachten Sie den Raum aller Polynome vom Grad ≤ 3. Wir nennen diesen Raum V. Was ist $\dim V$? Geben Sie auch eine Basis an. Nun definieren wir die lineare Abbildung $L : V \to V$ durch $L(P) = P'$, d.h. wir bilden ein Polynom auf seine Ableitung ab. Begründen Sie, dass

$$\ker L = \{P \in V \mid L(P) = 0\} \quad \text{und} \quad \operatorname{im} L = \{Q \in V \mid \exists P \in V \text{ so dass } L(P) = Q\} \tag{13}$$

Vektorräume sind, und bestimmen Sie jeweils die Dimension.