

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 14 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 23.12.20

Interludium: 7 Komplexe Zahlen

Wir finden es doof, dass wir keine Wurzeln aus negativen Zahlen ziehen können, und erfinden deshalb die neue Zahl $i = \sqrt{-1}$. Dann gilt z.B.

$$i^2 = -1 \quad \text{oder} \quad \sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i. \quad (1)$$

Jetzt bilden wir Zahlen der Form

$$z = x + iy \quad \text{mit} \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

und nennen sie komplexe Zahlen – Symbol: \mathbb{C} .

Mit denen rechnen wir wie gewohnt. <https://youtu.be/mEQQtukN0zo> (3 min) (3)

Summen, Differenzen und Produkte sind also auch wieder komplexe Zahlen.

Können wir auch dividieren? https://youtu.be/_doCXvQXPLk (4 min) (4)

Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ nennen wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= x && \text{den Realteil von } z, \\ \operatorname{Im} z &= y && \text{den Imaginärteil von } z \quad \text{und} \\ \bar{z} &= x - iy && \text{das Komplexkonjugierte von } z. \end{aligned} \quad (5)$$

(Mit \bar{z} haben wir gerade eben erweitert, um das mit dem Dividieren hinzubekommen.)

Rechnen Sie nach, dass

$$z \cdot \bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2. \quad (6)$$

OK, aber was soll der Quatsch? Diese Zahlen gibt's doch gar nicht. Doch!

Gaußsche Zahlenebene <https://youtu.be/jTlC8-4PWoo> (3 min) (7)

Dann ist \mathbb{C} also die coolere Version von \mathbb{R}^2 ? Ja. Aber da geht noch mehr! Um gleich auch die Multiplikation anschaulich zu verstehen, führen wir zunächst die Polardarstellung ein:

$$\begin{aligned} \text{Betrag:} \quad r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} && \text{bzw.} \quad x = r \cos \phi \\ \text{Argument:} \quad \phi &= \arg z = \arctan \frac{y}{x} && y = r \sin \phi \end{aligned} \quad (8)$$

https://youtu.be/VR3_ouK9owQ (3 min)

Übrigens: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

7 Komplexe e-Funktion

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir e^z durch die Taylorreihe der Exponentialfunktion...

$$\text{Wieso?} \quad \text{https://youtu.be/mfrwsEWHnG0} \quad (2 \text{ min}) \quad (9)$$

... und dann können wir ausrechnen, dass $\forall \phi \in \mathbb{R}$

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi. \quad \text{https://youtu.be/ufHiIu7aGL4} \quad (5 \text{ min}) \quad (10)$$

Wegen der Funktionalgleichung der e-Funktion bewirkt Multiplikation mit $e^{i\phi}$ also eine

$$\text{Drehung um den Winkel } \phi. \quad \text{https://youtu.be/dS08r9lm23w} \quad (3 \text{ min}) \quad (11)$$

Warum sind wir uns eigentlich sicher, dass $e^{z+w} = e^z e^w$ auch für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt?

Begründen Sie, warum nun $e^{-i\phi} = \cos \phi - i \sin \phi$ gilt.

Drücken Sie damit Sinus und Kosinus durch $e^{i\phi}$ und $e^{-i\phi}$ aus.

Anwendungen:

$$\text{Additionstheoreme} \quad \text{https://youtu.be/WsdEMxu0MSg} \quad (2 \text{ min}) \quad (12)$$

$$\sum_{\nu=0}^n \sin(\nu x) \quad \text{https://youtu.be/HSw41yk4rNo} \quad (7 \text{ min}) \quad (13)$$

Eigentlich waren wir doch in letzter Zeit beim Thema Vektorrechnung...

Ja, das können wir auch mit komplexen Zahlen machen!

Wenn wir einen Vektorraum V über einem Körper K betrachten, dann können die komplexen Zahlen sowohl bei den Vektoren, als auch bei den Skalaren auftauchen:

- ▶ \mathbb{C} als Vektorraum über \mathbb{R}
- ▶ \mathbb{C} als Vektorraum über \mathbb{C} <https://youtu.be/QDRM6TqUN3M> (4 min) (14)

Als \mathbb{C}^2 bezeichnen wir den Raum der zwei-komponentigen Vektoren mit komplexen Einträgen. **Überlegen Sie:** Welche Dimension hat \mathbb{C}^2 als Vektorraum über \mathbb{R} ? Welche als Vektorraum über \mathbb{C} ? Können Sie jeweils eine einfache Basis angeben?