Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 20/21

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 16 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 13.01.21

5.5 Skalarprodukt und Norm (Fortsetzung)

Orthonormalbasen sind also schön. Was machen wir, wenn wir "nur" eine Basis haben?

Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren
Gegeben: Basis $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ von V.
Gesucht: ON-Basis $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n\}$ von V.
Lösung:

$$\vec{c}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|} \tag{1}$$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \langle \vec{c}_1, \vec{a}_2 \rangle \vec{c}_1 \qquad \vec{c}_2 = \frac{\vec{b}_2}{\|\vec{b}_2\|} \tag{2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\vec{b}_n = \vec{a}_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle \vec{c}_j, \vec{a}_n \rangle \vec{c}_j \qquad \vec{c}_n = \frac{\vec{b}_n}{\|\vec{b}_n\|} \tag{3}$$

Warum sollte das klappen? https://youtu.be/m_ySSTGld70 (7 min) (4)

Beispiel: $\mathbb{R}^3$ mit kanonischem Skalarprodukt,

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V = \operatorname{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2)\,. \tag{5}$$

https://youtu.be/GhRDuJskXDo (5 min)

Überlegen Sie: Was passiert, wenn wir das Verfahren auf Startvektoren $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ anwenden, die l.a. sind, die also keine Basis bilden?

5.6 Kreuzprodukt und Spatprodukt im $\mathbb{R}^3$

Für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ definieren wir das **Kreuzprodukt** (oder Vektorprodukt) durch

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Vorbemerkung: https://youtu.be/yJbe5TyoG7I (2 min) (7)

Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Satz 13. (Eigenschaften von $\times$) *Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ *(antikommutativ)*

(ii) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ *(Distributivgesetz)*

(iii) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$

(iv) $|\vec{a} \times \vec{b}| =$ *Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms*

(v) $\vec{a} \times \vec{b}$ *ist orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$ (bzgl. des kanonischen Skalarprodukts)*

(vi) *falls $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$, bilden $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ ein Rechtssystem* *(rechte Hand-Regel)*

Beweis:

(i), (ii) & (iii) https://youtu.be/nWCERXnw54I (3 min) (8)

(iv) https://youtu.be/BkMkborXjNM (6 min) (9)

(v) https://youtu.be/IffhkJvOA_o (3 min) (10)

Rechnen Sie nach, dass $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ gilt (mit den kanonischen Einheitsvektoren $\vec{e}_j$).

(vi) https://youtu.be/USNWNqjqPEk (5 min) (11)

Überlegen Sie: Gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ für beliebige $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$?

Für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ definieren wir das **Spatprodukt** durch

$$\left|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right| = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \tag{12}$$

Eigenschaften:

- $\left|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right| = \left|\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right| = \left|\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right|$
- $\left|\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right| = -\left|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right|$
- Der Betrag von $\left|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right|$ ist gleich dem Volumen des, von den Vektoren aufgespannten, Parallelepipeds bzw. Spats.

Begründung:

https://youtu.be/lzmHv6HPmRw (4 min) (13)

Reprise: **7 Komplexe Zahlen**

Für $n \in \mathbb{N}$ suchen wir alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^n = 1$. Wir verwenden die Polardarstellung $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$. **Überlegen Sie:** Welche Bedingungen müssen r und ϕ erfüllen?

Vorschau: **5.7 Geraden und Ebenen**

Welche Darstellungen für Geraden und Ebenen (im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$) kennen Sie? Welche Begriffe fallen Ihnen im Zusammenhang mit Geraden, Ebenen und Vektoren ein?