Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 20/21

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 18 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 20.01.21

5.8 Kurven und spezielle Koordinatensysteme (Fortsetzung)

Die Polardarstellung gibt's auch für $\mathbb{R}^3$, genannt **Kugelkoordinaten:**

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{c} r \in [0,\infty) \\ \theta \in [0,\pi] \\ \phi \in [0,2\pi) \end{array}. \tag{1}$$

https://youtu.be/39wyFoV5v0g (6 min)

Geben Sie die folgenden Punkte (x, y, z) aus $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) an:

$$(0,0,-1) \qquad (3,0,0) \qquad (-1,0,0) \qquad (0,2,0) \qquad (1,1,\sqrt{2}) \tag{2}$$

---

6 Matrizen und Determinanten

6.1 Matrizen

Definition: Eine $m \times n$-Matrix A ist ein rechteckiges Zahlenschema,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m_1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

mit m Zeilen und n Spalten. Die $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (oder $\in \mathbb{C}$) heißen Elemente (oder Komponenten) der Matrix. Wir schreiben

$$A = (a_{ij}) \tag{4}$$

und sagen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (bzw. $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$).

https://youtu.be/hIGIFzfkxZo (3 min) (5)

Multiplikation mit Skalaren definieren wir komponentenweise, ebenso die Addition von Matrizen gleichen Typs:

https://youtu.be/I-6reHcRRMk (2 min) (6)

So wird $\mathbb{R}^{m\times n}$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Dimension $\dim \mathbb{R}^{m\times n} = mn$.
Können Sie eine einfache Basis angeben?

Für zwei Matrizen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times\ell}$ und $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$ definieren wir das **Matrixprodukt** durch

$$C = AB \quad \text{mit} \quad C = (c_{ij})\,, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{ik}b_{kj}\,. \tag{7}$$

Kurz: Zeile mal Spalte.

Huch? Beispiel bitte! https://youtu.be/-5HAehcrT_s (5 min) (8)

Wichtig: Es kommt auf die Reihenfolge an!

https://youtu.be/gni9umjkWv0 (3 min) (9)

Ansonsten gelten die gleichen **Rechenregeln** wie bei Produkten von Zahlen:

- $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$,
  $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$,
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ und
- $A(BC) = (AB)C$,

wobei λ skalar, alles andere Matrizen – Typen so, dass alle Produkte definiert sind.

Multiplizieren wir quadratische Matrizen, sagen wir $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so bleibt der Typ erhalten, d.h. $AB \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die **Einheitsmatrix**

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{10}$$

übernimmt die gleiche Rolle wie die Zahl 1 bei der Multiplikation von Zahlen, d.h.

$$AI = IA = A \quad \forall\, A \in \mathbb{R}^{n\times n}\,. \tag{11}$$

Probieren Sie das aus! **Berechnen Sie** AB, BA, AI, IA, BI und IB für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Sei A eine Matrix vom Typ $m \times n$. Vertauschen wir Zeilen mit Spalten, so erhalten wir eine Matrix vom Typ $n \times m$: A^T, die **Transponierte** von A.

https://youtu.be/q0CfILmmdR0 (2 min) (13)

Überlegen Sie: Wenn A vom Typ $m \times n$ ist, welche Form haben dann AA^T und A^TA?

Überzeugen Sie sich hiervon: Fassen wir Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ als Spaltenmatrizen auf, also $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, so können wir das kanonische Skalarprodukt wie folgt durch ein Matrixprodukt ausdrücken:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T\vec{y}\,. \tag{14}$$

Dabei bezeichnet der Punkt links das kanonische Skalarprodukt, rechts multiplizieren wir Matrizen.