Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 20/21

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 19 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 22.01.21

6.1 Matrizen (Fortsetzung)

Wenn wir ein Matrixprodukt transponieren, passiert etwas Lustiges:

$$(AB)^T = B^T A^T \qquad \text{https://youtu.be/6ePxDrO2v4Q (4 min)} \tag{1}$$

Weitere **Rechenregeln** gelten wie erwartet,

- $(A+B)^T = A^T + B^T$ (A, B Matrizen gleichen Typs)
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ (λ skalar)

und zweimal Transponieren bringt uns zurück zur Ausgangsmatrix: $(A^T)^T = A$.

Anwendung (für Matrixprodukt): Lineare Gleichungssysteme

Mit dem Matrixprodukt können wir das LGS

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2}$$

kurz in der Form

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{3}$$

schreiben, wobei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$:

https://youtu.be/X_dvIrS9s1A (5 min) (4)

Nun wäre es also schön, wenn wir durch A "teilen" könnten.

Definition: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wir nennen A^{-1} die zu A inverse Matrix, falls gilt

$$A^{-1}A = I \qquad \text{und} \qquad AA^{-1} = I\,. \tag{5}$$

Bemerkungen:

- Nicht jede (quadratische) Matrix ist invertierbar, z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{https://youtu.be/gHmjnzATHGQ (3 min)} \tag{6}$$

- Wenn eine Inverse existiert, dann existiert genaue eine Inverse (nicht mehrere).

Rechnen Sie nach, dass $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ die Inverse von $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist.

Wir berechnen die Inverse mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} A & I \end{array} \right) \\ \hline \vdots \\ \hline \left(\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array} \right) \end{array} \qquad \texttt{https://youtu.be/ffTI0V6SyG8}\ (4\,\text{min}) \tag{7}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \qquad \text{falls} \quad ad - bc \neq 0\,. \tag{8}$$

https://youtu.be/AcazTtb9Di8 (9 min)

Berechnen Sie die Inversen von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Wir nennen $\det A = ad - bc$ die **Determinante** von $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, denn sie bestimmt (determiniert), ob A invertierbar ist (falls $\det A \neq 0$) oder nicht (falls $\det A = 0$). Diese Zahl hat auch eine anschauliche Bedeutung:

https://youtu.be/5HKDWfl_B5U (4 min) (10)

Diese Anschauung wird uns helfen, nächstes Mal die Verallgemeinerung für $n \times n$-Matrizen zu finden.