Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 20/21

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 20 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 27.01.21

6.2 Determinanten

Die Determinante einer 2×2-Matrix gibt den Flächeninhalt des von den Spalten aufgespannten Parallelogramms an (mit Orientierung/Vorzeichen). Jetzt suchen wir eine Abbildung

$$\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}\,, \tag{1}$$

die das Volumen des, von den Spaltenvektoren der Matrix aufgespannten Parallelepipeds liefert. Gewünschte Eigenschaften:

(i) linear in jeder Spalte
(ii) normiert https://youtu.be/bZ2LQAJI-Ig (4 min) (2)
(iii) alternierend

Was folgt aus diesen anschaulich motivierten Wünschen?

$$\text{(i)} \quad \Rightarrow \quad \det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} C_{j_1\ldots j_n} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} \tag{3}$$

https://youtu.be/tUdfK0coWbI (3 min)

$$\text{(ii)} \quad \Rightarrow \quad C_{1\,2\,3\ldots n} = 1 \tag{4}$$
https://youtu.be/3eWnmXDd2P8 (2 min)

$$\text{(iii)} \quad \Rightarrow \quad C_{\ldots j_k \ldots j_l \ldots} = -C_{\ldots j_l \ldots j_k \ldots} \tag{5}$$
https://youtu.be/FOxULISezPI (4 min)

Damit ist det *festgelegt!*

Das sah wild aus! Kommt für $n = 2$ und $n = 3$ wirklich das raus, was wir schon kennen?

$n = 2$ https://youtu.be/8bIOaLTeoBU (2 min) (6)
$n = 3$ https://youtu.be/5JySDsoERw0 (5 min) (7)

Aber zum Berechnen ist das doch aufwändig. Besser geht's mit diesen Beobachtungen:[1]

- Für obere Dreiecksmatrizen: Produkt der Diagonalelemente

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn} \tag{8}$$

- Vertauschen wir zwei Spalten (oder zwei Zeilen!), so ändert sich die Determinante um einen Faktor (-1).
- Addieren wir das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile, so ändert sich die Determinante nicht.

https://youtu.be/9NQ6WkgfDT4 (5 min) (9)

Also nutzen wir den (eingeschränkten) Gauß-Algorithmus!

Beispiel:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 11 \\ 2 & 8 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ -2 & -7 & 0 & -7 \end{pmatrix} = -6 \qquad \text{https://youtu.be/muYZvrVQlDo (2 min)} \tag{10}$$

Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & -3 \\ 0 & -1 & \pi & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & \pi & 8 \\ 5 & -7 & 4 & 9 \\ 4 & 8 & -4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Auch hilfreich ist gelegentlich der folgende Satz (ohne Beweis).[2]

Satz 15. (Determinantenmultiplikationssatz)
Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (oder $\in \mathbb{C}^{n\times n}$). Dann gilt

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B\,. \tag{12}$$

Begründen Sie, dass damit auch $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$ gilt.

Beliebt zum Berechnen von Determinanten (aber auch etwas überbewertet) ist auch der Laplacesche Entwicklungssatz, im Skript **Satz 16**. Die Formel sieht abschreckend aus, ich erkläre Ihnen daher lieber nur, wie Sie den Satz anwenden können:

https://youtu.be/OuovVGWg5CI (6 min) (13)

[1] Erklärungen zu den drei Beobachtungen im Video darunter.
[2] Interessierte finden im Skript einen Beweis.