Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 20/21

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 21 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 29.01.21

Reprise: 7.2 Komplexe Vektorräume: Skalarprodukte

Skalarprodukte auf Vektorräumen über $\mathbb{R}$ mussten die drei Bedingungen (S1), (S2) und (S3) erfüllen (siehe Anleitung 15). Fordern wir für Skalarprodukte auf Vektorräumen über $\mathbb{C}$ dieselben Eigenschaften, so gibt es keine Skalarprodukte:

https://youtu.be/qeb_sMdz5LM (3 min) (1)

Als Lösung modifizieren wir die erste Bedingung:

$$\text{(S1)}' \qquad \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle = \overline{\langle \vec{w}, \vec{z} \rangle} \tag{2}$$

https://youtu.be/-PUGVTezJhk (5 min)

Beispiel: Das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$,

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{z_j}\, w_j \,. \tag{3}$$

https://youtu.be/9b98j3Sb5RM (5 min)

Berechnen Sie $\|\vec{z}\|$, $\|\vec{w}\|$ und $\langle \vec{z}, \vec{w} \rangle$ für

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

mit dem kanonischen Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$ und der zugehörigen Norm.

Bei **Matrizen** mit komplexen Einträgen bleibt alles wie gehabt. Die komplexkonjugierte Matrix bestimmen wir komponentenweise, z.B.

$$\overline{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 1+\mathrm{i} & \mathrm{i}-2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \mathrm{i} \\ 0 & 1-\mathrm{i} & -\mathrm{i}-2 \end{pmatrix} . \tag{5}$$

Gilt dann $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$?

Geben Sie $\overline{A}$, A^T sowie $\overline{A}^T$ an für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 0 & 2+\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix} , \tag{6}$$

und berechnen Sie $\overline{A}^T A$ sowie $A\overline{A}^T$.

Drücken Sie das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ mithilfe des Matrixprodukts aus.

Determinanten berechnen wir genau gleich wie bei reellen Matrizen,

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathrm{i} \\ 2 & -\mathrm{i} & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -4 + 6\mathrm{i}\,. \qquad \texttt{https://youtu.be/u9mSXMelalI}\ (2\,\mathrm{min}) \tag{7}$$

Berechnen Sie

$$\det \begin{pmatrix} a+b & c-\mathrm{i}d \\ c+\mathrm{i}d & a-b \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}\,. \tag{8}$$

Verschnaufpause. Anstatt hier direkt mit dem nächsten Thema – Integrale – zu beginnen, lassen wir dieses Blatt etwas kürzer. Blicken Sie kurz auf das zurück, was wir bisher behandelt haben. Vielleicht wollen Sie im Livestream am 29. Januar nochmal etwas zu einem der zurückliegenden Themen hören. Schreiben Sie Ihre Wünsche und Fragen gerne vorab ins Forum oder spontan auf die Chatwall.
