

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 22 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 03.02.21

8. Integration

Definition: (Stammfunktion)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

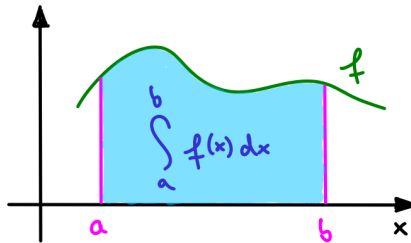
Eine diffbare Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f ,

falls gilt $F'(x) = f(x) \forall x \in I$.

Bemerkung: Besitzt f eine Stammfunktion, so besitzt f viele Stammfunktionen.

<https://youtu.be/4ubb1DXx15U> (2 min) (1)

Wir nennen die **Fläche unter dem Graph** einer Funktion das Integral.



<https://youtu.be/baUMwBeXZJk> (2 min) (2)

Behauptung: (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{ist eine Stammfunktion von } f. \quad (3)$$

https://youtu.be/_jHzCakg1KM (5 min)

Damit können wir Integrale wie folgt berechnen,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \text{https://youtu.be/Ux_Cw9m0BNo} \quad (2 \text{ min}) \quad (4)$$

wobei F hier eine beliebige Stammfunktion von f ist.

Beispiele: ($\alpha \neq -1, \omega \in \mathbb{R}$)

$$\int_1^3 x^\alpha dx, \quad \int_1^e \frac{dx}{x}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin(\omega t) dt. \quad \text{https://youtu.be/aDXe6Vr0aso} \quad (4 \text{ min}) \quad (5)$$

Berechnen Sie:

$$\int_2^3 \frac{x^2 + x - 1}{x} dx. \quad (6)$$

Überlegen Sie:

$$\text{Wenn } F(x) = \int_0^{x^4} e^{-t^2} dt \quad \text{ist, wie sieht dann } F'(x) \text{ aus?} \quad (7)$$

Wir beobachten ein paar Eigenschaften des Integrals und schwächen gleichzeitig einige der Voraussetzungen ab:¹

► **Linearität**

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (8)$$

► **Stückweises Integrieren**

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (9)$$

► **Für Abschätzungen:**

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (10)$$

sowie

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad (11)$$

$$\text{\color{blue} <https://youtu.be/JMzFx3FhaJs> (6 min)} \quad (12)$$

8.2 Integrationstechniken

Satz 17. (Partielle Integration)

Seien f und g stetig auf $[a, b]$ und stetig diffbar auf (a, b) , dann gilt

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx \quad (13)$$

Beweis:

$$\text{\color{blue} <https://youtu.be/Zn1zmTqGFRc> (3 min)} \quad (14)$$

Beispiele:

$$\int x \sin x dx \quad \text{\color{blue} <https://youtu.be/ApuPRUy6wBs> (3 min)} \quad (15)$$

$$\int \log x dx \quad \text{\color{blue} <https://youtu.be/xMwcBX0Eumk> (3 min)} \quad (16)$$

Bestimmen Sie ähnlich wie im letzten Beispiel eine Stammfunktion des Arkustanges.

Im Livestream werde ich vorführen, wie wir mit partieller Integration auch $\int \sin^2 x dx$ knacken – falls Sie schon mal überlegen möchten, wie das gehen könnte.

Aber egal wie toll meine Videos zur partiellen Integration sind, an das hier komme ich leider nicht ran: <https://youtu.be/-reFBJ4R9iA>

¹Gesammelte Erklärungen im Video darunter.