Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 20/21

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 23 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 05.02.21

8.2 Integrationstechniken (Fortsetzung)

Der Beweis des Taylorschen Satzes ist eine hübsche Anwendung der partiellen Integration.

Satz 18. (Integralrestglied für Taylor)
Sei f $(n+1)$-mal stetig diffbar auf (a, b), dann gilt

$$f(x) - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n \,\mathrm{d}t\,, \tag{1}$$

wobei $x, x_0 \in (a, b)$.

Beweis:

https://youtu.be/Hc8W_4-RohE (10 min) (2)

Den Satz von Taylor mit dem anderen (unbewiesenen) Restglied haben wir nur verwendet, um zu zeigen, dass die exp-Reihe überall konvergiert. **Können Sie** das auch mit dem Integralrestglied zeigen?

Satz 19. (Substitutionsregel)
Sei f stetig auf I und $g : [a, b] \to J \subset I$ stetig diffbar, dann gilt

$$\int_a^b f\big(g(t)\big)\, g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{3}$$

Beweis: (mit Anwendungsanleitung und Beispiel)

https://youtu.be/Bch0bv02kEg (7 min) (4)

Weitere Beispiele:

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\log x}$$ https://youtu.be/4sYGmkUw8-s (1 min) (5)

$$\int \tan x \,\mathrm{d}x$$ https://youtu.be/L5qCr53N9aQ (2 min) (6)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$ https://youtu.be/j0wl30O_Dow (2 min) (7)

Bestimmen Sie

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x\,. \tag{8}$$

8.3 Riemannsche Zwischensummen

In diesem Abschnitt des Skripts lernen wir, wie so ein Integral präzise definiert werden kann. Das dient momentan primär der Allgemeinbildung. Werfen Sie mal einen Blick drauf. Die technischen Details dürfen Sie zunächst auch gerne überspringen.

Was sollten wir uns merken?

(a) Die Definition einer Zwischensumme: Gln. (8.72) und das zugehörige Bild.

(b) Hinter jedem Integral versteckt sich ein (komplizierter) Grenzwert.