Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 20/21

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 2 (Abgabe spätestens 20.11.2020, 8:00)

Aufgabe 7 (15 Punkte)
Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}3^{\nu}$ b) $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}3^{k}$ c) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{\ell}{\nu}3^{\nu}$

Aufgabe 8 (10 Zusatzpunkte)
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$3^n > 2n^2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Aufgabe 9 (6+6+3 = 15 Punkte)
Seien f, g und h Funktionen mit den Abbildungsvorschriften

$$f(x) = x^2 - 5\,, \qquad g(x) = \sqrt{x+3} \qquad \text{und} \qquad h(x) = x^3 + 2\,.$$

a) Geben Sie für f, g und h jeweils den maximalen Definitionsbereich (als Teilmenge von $\mathbb{R}$) an, und bestimmen Sie jeweils das Bild .

b) Existieren die folgenden Verkettungen? (Die Definitionsbereiche aus Teil (a) gelten weiterhin.) Geben Sie ggf. den Definitionsbereich und das Bild der jeweiligen Verkettung an.
(i) $f \circ g$ (ii) $g \circ f$ (iii) $f \circ h$
(iv) $h \circ f$ (v) $g \circ h$ (vi) $h \circ g$

c) Bestimmen Sie $(h \circ f)(x) - (f \circ h)(x)$.

Aufgabe 10 (6 Punkte)
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum sie nicht existieren.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+2n^2}\left(\frac{2n^5-7n^4+1}{n^2}-2n^3\right)\right)$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n}\right)$

Aufgabe 11 (keine Abgabe)

Das Pascalsche Dreieck, ein dreieckiges Zahlenschema, konstruieren wir wie folgt:

- In die erste Zeile schreiben wir eine 1.
- In die zweite Zeile schreiben wir links und rechts darunter je eine 1.
- Ab der dritten Zeile beginnen und beenden wir jede Zeile mit einer 1. In die Positionen dazwischen schreiben wir immer die Summe der Zahlen, die links und rechts darüber stehen.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
\iddots & & & \vdots & & & \ddots
\end{array}
$$

a) Warum entstehen auf diese Weise die Binomialkoeffizienten, und wo steht welcher Binomialkoeffizient?

b) Konstruieren Sie die ersten 10 Zeilen des Pascalschen Dreiecks.

c) Was bedeutet die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

aus der Vorlesung am Pascalschen Dreieck?

d) Wie lässt sich die Spiegelsymmetrie des Pascalschen Dreiecks als Beziehung (Formel) zwischen Binomialkoeffizienten ausdrücken?

Aufgabe 12 (8 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 10.01.21 auf `www.khanacademy.org` die Skills

- *Add and subtract fractions*,
- *Multiplying fractions*,
- *Dividing fractions* und
- *Order fractions*.

HINWEISE: Siehe Aufgabe 6 (Blatt 1).