Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 20/21
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 4 (Abgabe spätestens 04.12.2020, 8:00)

Aufgabe 18 (10 Punkte)
Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{\mu}\frac{\pi^\nu}{n-\nu+1}$ b) $\displaystyle\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=\mu}^{n}\frac{\mu}{\nu(\nu+1)}$

Hinweis: Kennzeichnen Sie in der $\mu\nu$-Ebene jeweils alle Paare (μ,ν), über die in $\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=\nu}^{n}\ldots$ bzw. in $\sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{\mu}\ldots$ summiert wird. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 19 (9 Zusatzpunkte)
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{6x+18}{27+x^3}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^{10}-1024}{8-x^3}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x^k-1}$ für $n,k\in\mathbb{N}$

Aufgabe 20 (9 Punkte)
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+20}\right)^n$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{n-20}$ c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{20-n}\right)^{3n}$

Aufgabe 21 (2+3+2 = 7 Zusatzpunkte)
Die Hyperbelfunktionen *Sinus Hyperbolicus*, *Kosinus Hyperbolicus* und *Tangens Hyperbolicus* sind definiert durch

$$\sinh(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\,,\quad \cosh(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\quad\text{und}\quad\tanh(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\,.$$

a) Für welche $x\in\mathbb{R}$ können wir die Funktionen definieren?
b) Bestimmen Sie jeweils den Limes für $x\to\infty$ und $x\to-\infty$.
c) Zeigen Sie: $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$.

Aufgabe 22 (10 Punkte)
Berechnen Sie jeweils die Ableitung von

a) $\sinh x$, b) $\cosh x$ und c) $\tanh x$

Drücken Sie dabei die Ergebnisse in möglichst einfacher Form wieder mit Hilfe dieser drei hyperbolischen Funktionen aus. Skizzieren Sie nun die Graphen von sinh, cosh und tanh. Auf welchen Teil-Intervallen ihres jeweiligen Definitionsbereichs sind die drei Funktionen streng monoton wachsend oder fallend? Geben Sie größtmögliche Intervalle an, auf denen die drei Funktionen injektiv sind, und schränken Sie die Wertebereiche so ein, dass die Funktionen dort auch surjektiv (und damit bijektiv) sind.

Aufgabe 23 (20 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 10.01.21 auf `www.khanacademy.org` die Skills

- *Evaluate inverse functions*,
- *Finding inverses of linear functions*,
- *Use the properties of logarithms*,
- *Evaluate logarithms*,
- *Evaluate logarithms (advanced)*,
- *Trigonometric ratios in right triangles*,
- *Unit circle (with radians)*,
- *Use the Pythagorean identity*,
- *Period of sinusoidal functions from equation* und
- *Graph sinusoidal functions*.

HINWEISE: Siehe Aufgabe 6 (Blatt 1).