

## Mathematik 1 für Naturwissenschaftler\*innen

Übungsblatt 8 (Abgabe spätestens 15.01.2021, 8:00)

---

### Aufgabe 43 (8 Punkte)

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen (wobei  $x, y \in \mathbb{R}$ ).

a)  $\frac{62 - 19i}{1 - 2i}$       b)  $(x + iy)^3$       c)  $\sqrt{6} \exp\left(\frac{1}{2} \log 3 + i\frac{\pi}{4}\right)$       d)  $\sin(x + iy)$

### Aufgabe 44 (14 Punkte)

Überprüfen Sie, ob durch  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  jeweils ein Skalarprodukt auf  $V$  definiert wird.

a)  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{j=1}^n a_j b_j$       b)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 3a_3 b_3$   
c)  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 - a_2 b_2$       d)  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 - a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_2 b_2$   
e)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 2a_3 b_3 - a_2 b_3 - a_3 b_2$

HINWEIS: Die Eigenschaften (S1) und (S2) können Sie für alle Aufgabenteile gleichzeitig überprüfen, denn alle Abbildungen haben die Form  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_j \sum_k \mu_{jk} a_j b_k$  mit  $\mu_{kj} = \mu_{jk}$ .

### Aufgabe 45 (12 Punkte)

Seien

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil das kanonische Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^3$  und die zugehörige Norm.  
Berechnen Sie die Normen  $\|\vec{a}_j\| = |\vec{a}_j|$ ,  $j = 1, 2, 3$   
und alle Skalarprodukte  $\langle \vec{a}_j, \vec{a}_k \rangle = \vec{a}_j \cdot \vec{a}_k$ ,  $j \neq k$ .
- b) Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil das Skalarprodukt aus Aufgabe 44e und die zugehörige Norm.  
Berechnen Sie die Normen  $\|\vec{a}_j\|$ ,  $j = 1, 2, 3$   
und alle Skalarprodukte  $\langle \vec{a}_j, \vec{a}_k \rangle$ ,  $j \neq k$ .

### Aufgabe 46 (5 Zusatzpunkte)

Für welche  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  sind die folgenden Vektoren aus  $\mathbb{R}^3$  linear abhängig?

$$\begin{pmatrix} \beta \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}.$$