Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 20/21

Mathematatik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 10 (Abgabe spätestens 29.01.2021, 8:00)

Aufgabe 53 (8 Punkte)

Geben Sie die folgenden Punkte (x, y, z) aus $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) an:

a) $(\pi, 0, 0)$ b) $(0, 0, 5)$ c) $(-1, 0, 1)$ d) $(1, -1, -\sqrt{2}\,)$

Aufgabe 54 (10 Punkte)

Berechnen Sie – falls möglich – für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) AA^T, b) A^TA, c) AA^TB, d) A^TAB,
e) B^TAA^T, f) A^2, g) A^TAA^TA.

Hinweis: Assoziativität, d.h. $(AB)C = A(BC)$, ist hilfreich.

Aufgabe 55 (10 Punkte)

Sei

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie B^{-1}.
b) Bestimmen Sie mithilfe von B^{-1} die Lösungen $\vec{x}$ und X von

$$B\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad BX = C\,.$$

Wie hätten Sie $\vec{x}$ oder X berechnen können, ohne zunächst B^{-1} zu bestimmen?

Aufgabe 56 (10 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 14.02.21 auf `www.khanacademy.org` die Skills

- *Matrix elements*,
- *Matrix equations: scalar multiplication* und
- *Multiply matrices.*
- *Inverse of a* 3×3 *matrix*,
- *Represent linear systems with matrix equations.*

Hinweise: Siehe Aufgabe 6 (Blatt 1).

Aufgabe 57 (keine Abgabe)

Wir definieren die Potenz A^n einer quadratischen Matrix A durch

$$A^0 = I \text{ und } A^{n+1} = AA^n\,,$$
$$\text{d.h.}\quad A^0 = I\,,\quad A^1 = A\,,\quad A^2 = AA\,,\quad A^3 = AAA\,,\ \ldots$$

Weiter definieren wir e^{Ax} für $x \in \mathbb{R}$ durch die bekannte Taylorreihe der e-Funktion, d.h. $\mathrm{e}^{Ax} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n$. Berechnen Sie e^{Ax} für $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Hinweise: (i) Berechnen Sie zunächst A^2, A^3 und A^4. Folgern Sie daraus, wie A^n aussieht.
(ii) Aus der Definition der Matrixaddition (komponentenweise) folgt

$$\sum_n \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_n a_n & \sum\limits_n b_n \\ \sum\limits_n c_n & \sum\limits_n d_n \end{pmatrix}.$$