Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 20/21
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 13 (Abgabe spätestens 19.02.2021, 8:00)

Aufgabe 66 (10 Zusatzpunkte)
Zeigen Sie: Die Funktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)$, mit $n \in \mathbb{N}$, bilden ein Orthonormalsystem (ONS) in $C([0, 2\pi])$ bezüglich des Skalarprodukts aus Aufgabe 65.

Aufgabe 67 (Fourierreihen) (5+10 = 15 Zusatzpunkte)
Die Funktionen aus Aufgabe 66 bilden nicht nur ein ONS sondern tatsächlich auch die ∞-dimensionale Verallgemeinerung einer Basis (eine sogenannte Schauderbasis bzw. ein vollständiges ONS)[1]. Wir können nun ein Element aus $f \in C([0, 2\pi])$, d.h. eine stetige Funktion $f(x)$, in diese Basis entwickeln, d.h. die Funktion als Linearkombination der Basisfunktionen darstellen,[2]

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} + b_n \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right) . \qquad (*)$$

Die Koeffizienten a_n und b_n erhalten wir, indem wir das Skalarprodukt von f mit den Basisvektoren bilden (vgl. Anleitung 15), d.h.

$$a_0 = \left\langle \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \, , \, f \right\rangle , \quad a_n = \left\langle \tfrac{\cos(n\,\cdot)}{\sqrt{\pi}} \, , \, f \right\rangle , \quad b_n = \left\langle \tfrac{\sin(n\,\cdot)}{\sqrt{\pi}} \, , \, f \right\rangle \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N} ,$$

bzw. explizit

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x , \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \cos(nx)\, f(x)\,\mathrm{d}x , \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \sin(nx)\, f(x)\,\mathrm{d}x .$$

Wir nennen $(*)$ die Fourierreihe von f. Bestimmen Sie die Fourierreihen von

a) $f(x) = \sin^2 x$
b)

$$g(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & , \quad \frac{\pi}{2} < x \le \frac{3\pi}{2} \\ x - 2\pi & , \quad \frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi \end{cases}$$

Hinweise: Für Teil (a) müssen Sie keine Integrale ausrechnen. Skizzieren Sie für Teil (b) zunächst den Graph von g und überlegen Sie sich, dass $a_n = 0 \;\forall\; n \in \mathbb{N}_0$ und $b_{2n} = 0$ $\forall\; n \in \mathbb{N}$ (warum?).

---

[1] Eigentlich sollten wir hier besser nicht nur von $C([a, b])$ sprechen, sondern von "etwas größeren" Funktionenräumen…

[2] Für hinreichend gutartige Funktionen konvergiert die Reihe dann auch wieder gegen die Funktion.