Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 20/21

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 14 (keine Abgabe, Besprechung im Sommersemester)

Aufgabe 68 (keine Abgabe)

Wir betrachten den Vektorraum $C([-1,1])$ mit dem Skalarprodukt aus Aufgabe 65. Sei $f_n(x) = x^n$. Offensichtlich gilt $f_n \in C([-1,1])\ \forall\ n \in \mathbb{N}_0$.

a) Berechnen Sie $\langle f_n, f_m \rangle$.

Sei $U = \operatorname{span}(f_0, f_1, f_2, f_3)$.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

c) Bestimmen Sie $\dim U$.

d) Sei $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ die Basis aus Teil b. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen P_0, P_1, P_2 und P_3 auf dem Intervall $[-1,1]$.

e) Sei $g(x) = (x-1)^2$. Drücken Sie g als Linearkombination der P_j aus.

Aufgabe 69 (keine Abgabe)

Die Funktion

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$$

ist für alle $s \in \mathbb{R}^+$ wohldefiniert. (Warum?)

a) Berechnen Sie $\Gamma(1)$.

b) Zeigen Sie: $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)\ \forall s > 0$. Hinweis: Partielle Integration.

c) Bestimmen Sie $\Gamma(6)$.

d) Zeigen Sie:

$$\frac{1}{x^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1}\, \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^+$$

Hinweis: Substitution.