WS 20/21

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen*

Stefan Keppeler Universität Tübingen, Fachbereich Mathematik
Auf der Morgenstelle 10
72076 Tübingen, Germany

Büro: C4P31
Email-Adresse: stefan.keppeler@uni-tuebingen.de

Inhaltsverzeichnis

*Dieses Skript ist **kein** Lehrbuch sondern das Vorbereitungsmaterial des Dozenten. Es sollte daher eher als ausführliche Formelsammlung betrachtet werden. Das Studium des Skripts kann den Besuch der Vorlesung nicht ersetzen – möglicherweise ist es aber beim Nachbereiten der Vorlesung, d.h. beim Bearbeiten der **Übungsaufgaben**, hilfreich.

Für Hinweise auf (sicherlich vorhandene) Fehler jeglicher Art sowie für sonstige Anregungen bin ich dankbar. *Stefan Keppeler*

1 Prolog: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$

In diesem Vorspann werden wir – zunächst noch nicht mit der mathematischen Strenge, die wir uns später zu eigen machen wollen – den Beweis der Gleichung $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ skizzieren. In der ZEIT vom 6. Juni 2007 (`www.zeit.de/2007/24/N-Eulersche-Zahl`) wurde diese Gleichung, umgestellt zu $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$, zur *schönsten mathematischen Gleichung schlechthin* gekürt.

1.1 π

Definiert am Kreis durch

$$\pi := \frac{\text{Umfang}}{\text{Durchmesser}} \approx 3{,}141\ldots \tag{1.1}$$

damit auch

$$\pi = \text{Halber Umfang des Einheitskreises (EK)}\,,$$

und als Winkel $\pi \,\widehat{=}\, 180°$.

1.2 e

Wir verzinsen ein Guthaben, sagen wir 100 €, jährlich mit einem Zinssatz z, z.B. $z = 2{,}5\% = 0{,}025$.

Das Vermögen nach einem Jahr erhalten wir durch Multiplikation mit dem Faktor $1 + z$, z.B. 100 €$\cdot 1{,}025 = 102{,}50$ €.

Bei halbjährlicher Verzinsung mit Zinssatz $\frac{z}{2}$ ist Faktor nach einem Jahr

$$\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right) = \left(1+\frac{z}{2}\right)^2 = 1 + z + \left(\frac{z}{2}\right)^2 > 1 + z\,, \tag{1.2}$$

also attraktiver, wegen des Zinseszins'.

Ananalog:

- Monatliche Verzinsung mit Zinssatz $\frac{z}{12}$, Faktor: $\left(1+\dfrac{z}{12}\right)^{12}$
- Tägliche Verzinsung mit Zinssatz $\frac{z}{365}$, Faktor: $\left(1+\dfrac{z}{365}\right)^{365}$
- ... wird immer mehr. Wie groß maximal?

Stetige Verzinsung: Kapital wächst innerhalb eines Jahres um den Faktor

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \tag{1.3}$$

Man zeigt (haben Sie in bereits der Schule gesehen, analysieren wir aber auch später nochmals genau)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \exp(z) = \mathrm{e}^z \quad \text{und insbesondere} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \approx 2{,}718\ldots \tag{1.4}$$

1.3 i

Wir definieren: $\mathrm{i} := \sqrt{-1}$.

Behauptung: $\boxed{(2{,}718\ldots)^{3{,}141\ldots\sqrt{-1}} = -1}$

1. Wie rechnen wir mit i?

- Bilde Zahlen $x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$,
- schleppe i überall mit,
- und ersetze i^2 durch -1,

z.B. Multiplikation: $(1+2\mathrm{i})\cdot(3-\mathrm{i}) = 3 - \mathrm{i} + 6\mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2 = 5 + 5\mathrm{i}.$

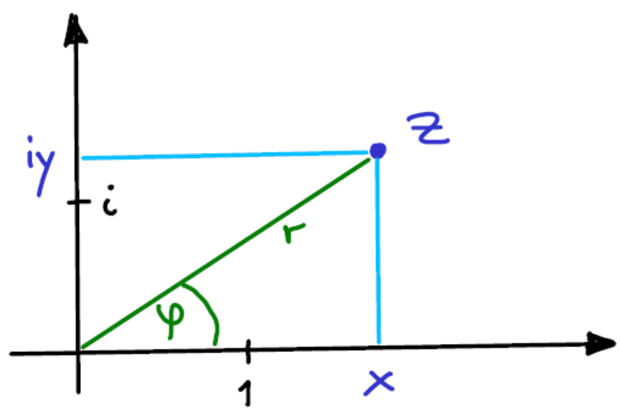
2. Was bedeutet das anschaulich?

Betrachte $z = x + \mathrm{i}y$ als Punkt in der (komplexen) Ebene.
In Polardarstellung:[2]

$$\begin{aligned} r &:= \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{(Abstand zum Ursprung)} \\ \varphi &:= \sphericalangle \text{ zur } x\text{-Achse} \end{aligned} \tag{1.5}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned} \tag{1.6}$$



Nochmal Multiplikation,

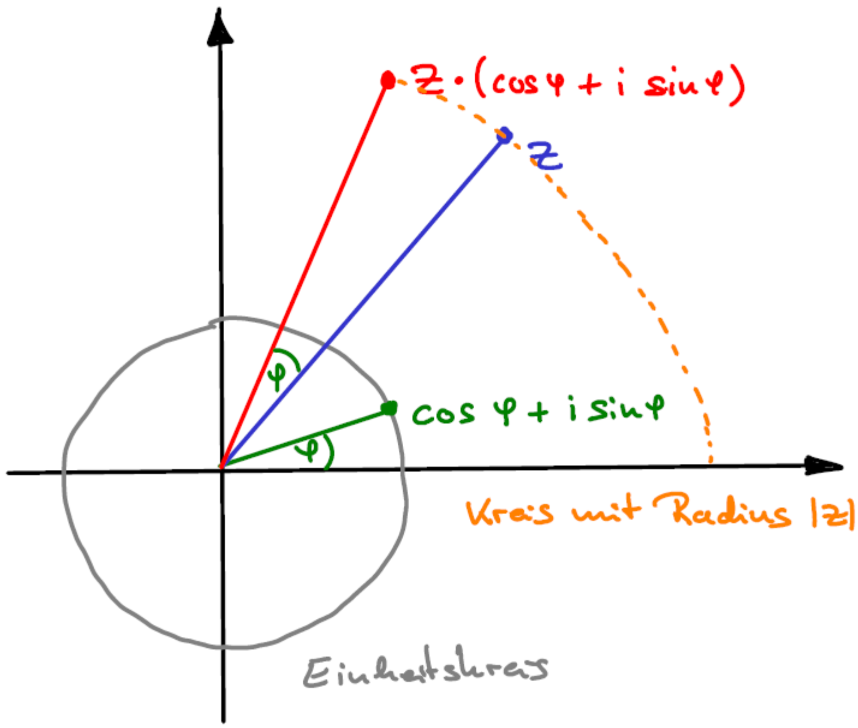
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2\big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \mathrm{i}(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\big)\,, \end{aligned} \tag{1.7}$$

mit Additionsthereomen (Trigonometrie, bekannt aus der Schule, kommt aber auch nochmal später),

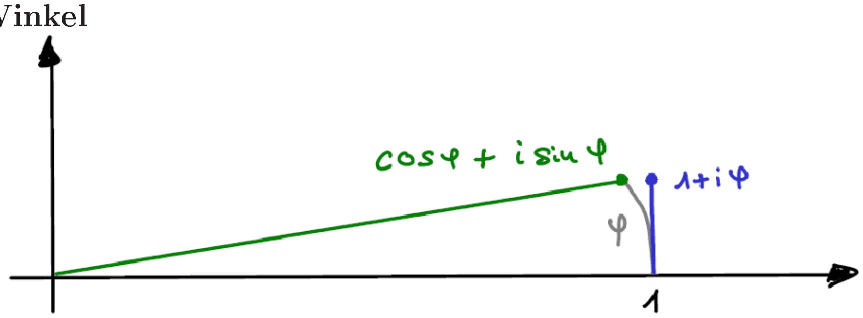
$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big)\,. \tag{1.8}$$

[2] Wir nennen r den Betrag und φ das Argument von z und schreiben dafür: $r = |z|$ und $\varphi = \arg(z)$.

Speziell $r = 1$: Multiplikation mit $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ bewirkt Drehung um Winkel φ.



3. Kleine Winkel



$$\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \approx 1 + \mathrm{i}\varphi \qquad \text{für kleine } \varphi \text{ (siehe Skizze)} \tag{1.9}$$

Je kleiner φ, desto besser ist diese Näherung.

4. Setze endliche Drehung zusammen

$$\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = \lim_{n\to\infty}\Big(\underbrace{\cos\tfrac{\varphi}{n} + \mathrm{i}\sin\tfrac{\varphi}{n}}_{\approx 1+\mathrm{i}\frac{\varphi}{n},\text{ wenn } n \text{ groß}}\Big)^n \underset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\mathrm{i}\varphi}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \tag{1.10}$$

(*) Hier sind eine Näherung und ein Limes involviert, d.h. wir müssen genauer untersuchen, ob es erlaubt war, in der Klammer die Näherung zu verwenden. Dazu müssen wir zunächst den bei der Näherung gemachten Fehler abschätzen – das wird später eine wichtiges Thema.

Mit $\varphi = \pi$ $(\cos\pi = -1,\ \sin\pi = 0)$ folgt die Behauptung. ☺

1.4 Bemerkungen zur Notation

Zahlenmengen

- $\mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots\}$,
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ die natürlichen Zahlen inkl. der Null,
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ die ganzen Zahlen,
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{Z}\,,\ q \neq 0\}$ die rationalen Zahlen – Brüche bzw. Zahlen mit endlicher oder periodischer Dezimalbruchentwicklung,
- $\mathbb{R}$ die reellen Zahlen – enthalten zusätzlich zu $\mathbb{Q}$ Zahlen wie $\sqrt{2} \approx 1{,}414\ldots$, $\pi \approx 3{,}141\ldots$ oder $\mathrm{e} \approx 2{,}718\ldots$, die nicht als Bruch geschrieben werden können.
- $\mathbb{C}$ die komplexen Zahlen, sind von der Form $\mathbb{C} \ni z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

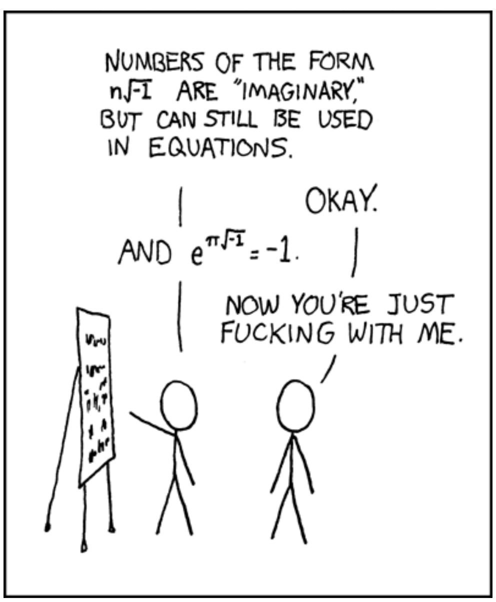
Bemerkung: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Griechische Buchstaben

A	α	Alpha
B	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E	ϵ, ε	Epsilon
Z	ζ	Zeta
H	η	Eta
Θ	θ, ϑ	Theta

I	ι	Iota
K	κ, $\varkappa$	Kappa
Λ	λ	Lambda
M	μ	My
N	ν	Ny
Ξ	ξ	Xi
O	o	Omikron
Π	π	Pi

P	ρ, ϱ	Rho
Σ	σ	Sigma
T	τ	Tau
Υ	υ	Ypsilon
Φ	ϕ, φ	Phi
X	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega



http://xkcd.com/179/

2 Vollständige Induktion

2.1 Geometrische Summe

$$s_n := 1 + x + x^2 + \ldots + x^n \qquad , \; x \in \mathbb{R} \text{ (oder } x \in \mathbb{C}) \tag{2.1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^k \qquad (x^0 = 1) \tag{2.2}$$

Behauptung: $(n \in \mathbb{N}_0)$

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1} & , \quad x \neq 1 \\ n + 1 & , \quad x = 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

1. Beweis: (durch Induktion)
(i) Induktionsanfang: $n = 0$

$$s_0 = \sum_{k=0}^{0} x^0 = 1 \qquad \text{(wie in Definition)} \tag{2.4}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x^{0+1} - 1}{x - 1} & = 1 \quad , \quad x \neq 1 \\ 0 + 1 & = 1 \quad , \quad x = 1 \end{cases} \qquad \text{(wie in Behauptung)} \tag{2.5}$$

(ii) Induktionsschritt / $n \to n + 1$:
Behauptung sei für (ein festens) n bewiesen;
zu zeigen: Behauptung gilt auch für $n + 1$

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= 1 + x + \ldots + x^n + x^{n+1} \\ &= s_n + x^{n+1} \\ &\underset{\text{I.V.}}{=} \begin{cases} \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + x^{n+1} & , \quad x \neq 1 \\ n + 1 + 1 & , \quad x = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{x^{n+2} - 1}{x - 1} & , \quad x \neq 1 \\ n + 2 & , \quad x = 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.6}$$

$\square$

2. Beweis: (konstruktiv)

für $x = 1$: $\quad s_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$

für $x \neq 1$:

$$s_n = 1 + x + \ldots + x^n \qquad | \cdot x \tag{2.7}$$

$$xs_n = x + x^2 + \ldots x^{n+1} \tag{2.8}$$

subtrahiere erste Zeile von der zweiten

$$s_n(x-1) = x^{n+1} - 1 \quad \underset{x\neq 1}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \tag{2.9}$$

$\square$

Nochmal mit Summenzeichen:

$$\begin{aligned}(x-1)s_n = xs_n - s_n = x\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu - \sum_{\nu=0}^{n} x^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} x^{\nu+1} - \sum_{\nu=0}^{n} x^\nu = \sum_{\nu=1}^{n+1} x^\nu - \sum_{\nu=0}^{n} x^\nu \\ = x^{n+1} + \sum_{\nu=1}^{n} x^\nu - \left(x^0 + \sum_{\nu=1}^{n} x^\nu\right) = x^{n+1} - 1\end{aligned} \tag{2.10}$$

2.2 Kleiner Gauß

Summe der ersten n ganzen Zahlen

$$\begin{aligned} s_n &:= 1 + 2 + \ldots + n \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \qquad \left(= \sum_{k=0}^{n} k\right)\end{aligned} \tag{2.11}$$

Behauptung:

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{2.12}$$

1. Beweis: (konstruktiv)

$$\begin{array}{l} s_n = 1 + \quad 2 \quad + \ldots + n \\ s_n = n + (n-1) + \ldots + 1 \\ \hline 2s_n = n(n+1) \end{array} \tag{2.13}$$

$$\Rightarrow \quad s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\square$

2. Beweis: (durch vollständige Induktion)
(i) Induktionsanfang: $n = 1$

$$s_1 = \sum_{k=1}^{1} k = 1 \qquad \text{(Definition)} \tag{2.14}$$

$$= \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 \qquad \text{(Behauptung)} \tag{2.15}$$

(ii) $n \to n+1$:

$$s_{n+1} = s_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \tag{2.16}$$

□

2.3 Prinzip der vollständigen Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussage für ganze Zahlen ($n \in \mathbb{Z}$).
Gilt:
(i) $A(n_0)$ ist wahr, für ein $n_0 \in \mathbb{Z}$ (Induktionsanfang), und
(ii) aus $A(n)$ wahr folgt $A(n+1)$ wahr $\forall\ n \geq n_0$
so folgt: $A(n)$ ist wahr $\forall\ n \geq n_0$.

Vorsicht: Nie den Induktionsanfang vergessen!
Sonst lassen sich viele falsche Dinge beweisen, z.B.
Behauptung (falsch!): $x^n < \frac{1}{2}\ \forall\ 0 < x < 1$
$n \to n+1$:

$$x^{n+1} = x \cdot x^n \underset{\text{I.V.}}{<} x \cdot \frac{1}{2} \underset{0<x<1}{<} \frac{1}{2} \tag{2.17}$$

Aber wir haben keinen Induktionsanfang!

Beispiel: Für $n \geq 4$ gilt: $n^2 \leq 2^n$
Induktionsanfang, $n = 4$:

$$16 = 4^2 \leq 2^4 = 16 \tag{2.18}$$

$n \to n+1$:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \underset{\text{I.V.}}{\geq} 2n^2 = n^2 + n^2 \underset{n \geq 4}{\geq} n^2 + 4n = n^2 + 2n + 2n \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \tag{2.19}$$

□

Notation: Summenzeichen
$a_n \in \mathbb{R}$ (oder $\in \mathbb{C}$)

$$\sum_{k=n}^{m} a_k := \begin{cases} a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m & , \quad m \geq n \\ 0 & , \quad m < n \end{cases} \tag{2.20}$$

Indexverschiebung:

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \sum_{k=0}^{m-n} a_{k+n} = \sum_{l=n+1}^{m+1} a_{l-1} \tag{2.21}$$

Merke: *Was man an den Grenzen abzieht, muss man am Index der Summanden addieren (und umgekehrt).*

Rechenregeln:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{l=0}^{n} b_l = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) \tag{2.22}$$

$$c\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} (c a_k) \tag{2.23}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{l=0}^{m} a_{kl} \right) = \sum_{l=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{kl} \right) \qquad \left(=: \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} a_{kl} \right) \tag{2.24}$$

Was ist hier falsch?
Behauptung: Alle einfarbigen Pferde haben die gleiche Farbe.

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang:
Ein einfarbiges Pferd hat offensichtlich die gleiche Farbe (wie es selbst)

$n \to n+1$:
Wir betrachten eine Menge von $n+1$ Pferden. Nehmen wir ein Pferd weg, so verbleiben n Pferde. Nach Induktionsvoraussetzung haben diese alle die gleiche Farbe. Nun nehmen wir ein anderes Pferd weg und stellen das zuvor weggenommene wieder dazu. Wieder haben die verbliebenen n Pferde nach Induktionsvoraussetzung die gleiche Farbe. Den beiden jeweils weggenommenen Pferden bleibt nichts anderes übrig, als auch die gleiche Farbe zu haben.

$\square$ (bzw. eben nicht!)

3 Binomische Formel

Ziel:

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} c_{n\nu}\, a^\nu b^{n-\nu} \tag{3.1}$$

Hintergrund: Ausmultiplizieren

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ mal}} \tag{3.2}$$

Was sind die Koeffizienten $c_{n\nu}$?

Definition: (Fakultät)
Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$n! := \begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdots n = \prod_{\nu=1}^{n} \nu & , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.3}$$

Notation: Produktzeichen

$$\prod_{\nu=n}^{m} a_\nu = \begin{cases} a_n \cdot a_{n+1} \cdots a_m & , \quad m \geq n \\ 1 & , \quad m < n \end{cases} \tag{3.4}$$

Definition: (Binomialkoeffizient)
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \qquad \text{sowie} \qquad \binom{\alpha}{0} := 1\,. \tag{3.5}$$

Besser mit Produktzeichen:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{\nu=0}^{k-1}(\alpha-\nu)\,. \tag{3.6}$$

Besonders wichtig für ganze Zahlen, also $n, k \in \mathbb{N}_0$,

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \qquad \text{sowie} \qquad \binom{n}{0} := 1\,. \tag{3.7}$$

Eigenschaften: $n, k \in \mathbb{N}_0$
(i)

$$\binom{n}{n} = 1 = \binom{n}{0} \tag{3.8}$$

(ii)

$$\binom{n}{k} = 0\,, \quad \text{für} \quad k > n \tag{3.9}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{(n-k)(n-k-1)\cdots 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 1}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \binom{n}{n-k}\end{aligned} \tag{3.10}$$

(iv) Funktionalgleichung

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k} \tag{3.11}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} &= \frac{k}{k}\,\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{(n-k+1)}{(n-k+1)}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k+1)!}\underbrace{\big(k+(n-k+1)\big)}_{=n+1}\\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\\ &= \binom{n+1}{k}\end{aligned} \tag{3.12}$$

□

Bemerkung: Aufbau des Pascalschen Dreiecks aus (i) und (iv).

Satz 1. (Binomi)
$\forall\ a,b\in\mathbb{R}$ (oder $\in\mathbb{C}$) und $\forall\ n\in\mathbb{N}_0$ gilt

$$(a+b)^n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}a^\nu\,b^{n-\nu}\,. \tag{3.13}$$

Beweis: (mit vollständiger Induktion)
(i) Induktionsanfang, $n=0$:
links:

$$(a+b)^0=1 \tag{3.14}$$

rechts:

$$\sum_{\nu=0}^{0}\binom{0}{\nu}a^\nu\,b^{0-\nu}=\binom{0}{0}a^0\,b^0=1\cdot 1\cdot 1=1 \tag{3.15}$$

…oder auch $n=1$:
linke Seite:

$$(a+b)^1=a+b \tag{3.16}$$

rechte Seite:
$$\sum_{\nu=0}^{1} \binom{1}{\nu} a^\nu\, b^{1-\nu} = \binom{1}{0} a^0\, b^{1-0} + \binom{1}{1} a^1\, b^{1-1} = b + a \tag{3.17}$$

(ii) $n \to n+1$:
$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&\underset{\text{I.V.}}{=} (a+b) \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu\, b^{n-\nu} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^{\nu+1}\, b^{n-\nu} + \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu\, b^{n+1-\nu} \\
&= \sum_{\nu=1}^{n+1} \binom{n}{\nu-1} a^\nu\, b^{n-(\nu-1)} + \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu\, b^{n+1-\nu} \\
&= a^{n+1} + \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu-1} a^\nu\, b^{n+1-\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu\, b^{n+1-\nu} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{\nu=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu}\right]}_{=\binom{n+1}{\nu}} a^\nu\, b^{n+1-\nu} + b^{n+1} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{n+1}{\nu} a^\nu\, b^{n+1-\nu}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

□

Beispiele:

1.
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{3.19}$$

2.
$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \tag{3.20}$$

3.
$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \tag{3.21}$$

Bemerkung: Stirlingsche Formel (ohne Beweis)
$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n, \quad n \to \infty \tag{3.22}$$
Asymptotisches Verhalten für große n, d.h.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n} = 1 \tag{3.23}$$

Merke: *Die Fakultät wächst also im Wesentlichen wie* n^n.

Satz 2. (Bernoullische Ungleichung)
$\forall n \in \mathbb{N}_0$ *und* $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, *gilt*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \tag{3.24}$$

Beweis: (vollständige Induktion)
(i) $n = 0$, $n = 1$ klar
(ii) $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\underset{\text{I.V.}}{\geq} (1+x)(1+nx) = 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + (n+1)x\end{aligned} \tag{3.25}$$

(In der ersten Zeile sind beide Faktoren ≥ 0, da $x \geq -1$.) $\square$

4 Funktionen einer reellen Variablen

Intervalle $I \subset \mathbb{R}$
abgeschlossenes Interval: $I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$
offenes Interval: $I = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$
oder gemischt, z.B. $1 \in (0, 1]$ aber $0 \notin (0, 1]$.

Bemerkungen: $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)\,, \quad \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Funktionen
$D \subseteq \mathbb{R}$ (d.h. Teilmenge oder gleich $\mathbb{R}$, z.B. ein Intervall)

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Jedem $x \in D$ wird genau ein $f(x) \in \mathbb{R}$ zugeordnet.
D heißt Definitionsbereich von f.
Das Bild von f ist die Menge

$$f(D) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, \exists\, x \in D, \text{ so dass } f(x) = y\}\,. \tag{4.2}$$

Komposition (bzw. Verkettung) von Funktionen

$$\begin{aligned} f : D &\to W \subset \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \\ \\ g : W &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto g(y) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dann existiert auch eine Abbildung

$$\begin{aligned} g \circ f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Beispiele:
1.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{4.5}$$
$$x \mapsto x^5 + 1 \qquad\qquad x \mapsto x^3 - 2 \tag{4.6}$$

(oder kurz: $f(x) = x^5 + 1$ und $g(x) = x^3 - 2$.)
Sowohl $f \circ g$ als auch $g \circ f$ existieren.

$$\begin{aligned} f \circ g : x &\mapsto f(x^3 - 2) = (x^3 - 2)^5 + 1 \\ g \circ f : x &\mapsto g(x^5 + 1) = (x^5 + 1)^3 - 2 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Bemerkung: I.A. ist $f \circ g \neq g \circ f$ (hier z.B. Ausrechnen mit Binomi)

2.

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{4.8}$$
$$x \mapsto \sqrt{x} \qquad\qquad x \mapsto x^2 - 1 \tag{4.9}$$

$g \circ f$ existiert und ist definiert durch[3]

$$\mathbb{R}_0^+ \ni x \mapsto g(\sqrt{x}) = x - 1 \tag{4.10}$$

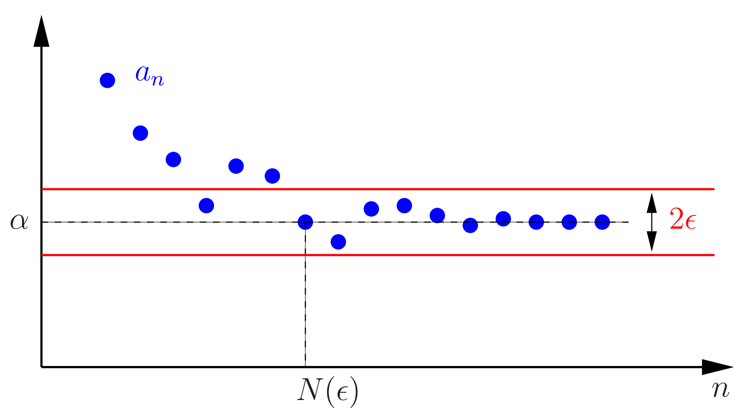
$f \circ g$ existiert dagegen nicht (zumindest nicht für alle x im Definitionsbereich von g).

4.1 Folgengrenzwerte

Eine (unendliche) **Folge** (a_n) reller (oder auch komplexer) Zahlen ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ (oder $\mathbb{N}_0$) nach $\mathbb{R}$, d.h. wir ordnen jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) zu.

Definition: (Grenzwert)
Eine (unendliche) Folge (a_n) konvergiert gegen den Grenzwert α, wenn gilt:
Für jedes $\epsilon > 0$ $\exists$ ein $N(\epsilon)$, so dass $|a_n - \alpha| < \epsilon$ $\forall$ $n \geq N(\epsilon)$. Man schreibt dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha\,. \tag{4.11}$$



Beispiele:
1. $(a_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ d.h. $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ konvergiert gegen Null,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,. \tag{4.12}$$

Bemerkung: Ist der Grenzwert 0, so sprechen wir von einer **Nullfolge**.

[3] $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R}\,|\,x > 0\} = (0,\infty)$, $\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R}\,|\,x \geq 0\} = [0,\infty)$, analog $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}_0^-$

2. Die Folge $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$, d.h. $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ konvergiert nicht.

3. Die Folge (a_n) mit $a_n = n^2$ konvergiert nicht (divergiert). Hier sagen wir die Folge strebt nach Unendlich und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty\,. \tag{4.13}$$

wobei: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \underset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \forall\, K > 0 \;\; \exists\, N(K),\;$ so dass $a_n > K \;\forall\, n \geq N(K)$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (später)

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \approx 2,718$ (später)

Rechenregeln: Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ ("$\neq \infty$", also konvergent) dann gilt:

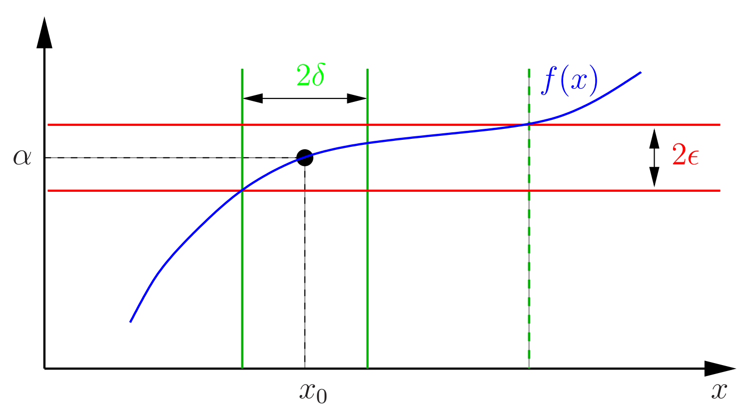
1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = \alpha\beta$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$ falls $\alpha \neq 0$

Merke: *Auseinanderziehen erlaubt, falls alles konvergent*

4.2 Funktionsgrenzwerte

Definition: (Grenzwert)[4]
Eine Funktion f hat an der Stelle x_0 den Grenzwert α, wenn gilt: Für jedes $\epsilon > 0$ $\exists$ ein $\delta(\epsilon) > 0$, so dass $|f(x) - \alpha| < \epsilon \;\forall\; x \in D$ mit $x \neq x_0$ und $|x - x_0| < \delta(\epsilon)$. Man schreibt dann

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha\,. \tag{4.14}$$



Bemerkung: Ähnlich schreiben wir $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ wenn gilt:
Für jedes $K < \infty$ $\exists$ ein $\delta(K) > 0$, so dass $f(x) > K \;\forall\; x \neq x_0$ mit $|x - x_0| < \delta(K)$.

[4] Wird nichts anderes gesagt, so gilt für den Rest des Kapitels stets $f : D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$.

Beispiele:

1. $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$, denn

$$\frac{1}{x^2} > K \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < \frac{1}{K} \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{K}} \tag{4.15}$$

d.h. $\delta(K) = \frac{1}{\sqrt{K}}$ tut's.

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2, \qquad$ denn $\quad \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} \quad$ (für $x \neq 1$)

4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ besitzt bei $x = 0$ keinen Grenzwert, denn

$$\begin{aligned} &f(x) > 1 \qquad \forall \quad 0 < x < 1 \qquad \text{und} \\ &f(x) < -1 \qquad \forall \quad -1 < x < 0\,. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Definition: (Rechtsseitiger Grenzwert)
Eine Funktion f hat an der Stelle x_0 den rechtsseitigen Grenzwert α, wenn gilt: Für jedes $\epsilon > 0$ $\exists$ ein $\delta(\epsilon) > 0$, so dass $|f(x) - \alpha| < \epsilon$ $\forall$ $x > x_0$ mit $|x - x_0| < \delta(\epsilon)$. Man schreibt dann

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \alpha\,. \tag{4.17}$$

Analog definiert man den linksseitigen Grenzwert mit $x < x_0$.

Zurück zu $f(x) = \dfrac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty\,. \tag{4.18}$$

Bemerkungen:

1. Gilt $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ so existiert der Grenzwert (und ist gleich den Beiden).

2. Man schreibt auch

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = \beta\,, \tag{4.19}$$

obwohl das eher wie ein links- bzw. rechtsseitiger Grenzwert aussieht.
Genauer:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \alpha \quad \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \quad$ für jedes $\varepsilon > 0$ $\exists$ $K(\varepsilon) < \infty$, so dass $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ $\forall$ $x > K(\varepsilon)$.

Beispiele:

1.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{4x^2} = 0 \qquad \text{(Zählergrad kleiner Nennergrad)} \tag{4.20}$$

2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = \infty \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = -\infty \qquad \text{(Zählergrad größer Nennergrad)} \tag{4.21}$$

3.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{x-4} = 1 \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1+2x^2}{2x+3x^2} = \frac{2}{3} \qquad \text{(Zählergrad gleich Nennergrad)} \tag{4.22}$$

Rechenregeln: Sei $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \beta$ (wobei $|\alpha|, |\beta| < \infty$) dann gilt:
1. $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \alpha + \beta$,
2. $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)\, g(x)\big) = \alpha\beta$,
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\alpha}$, falls $\alpha \neq 0$.

4.3 Stetigkeit

Definition: (Stetigkeit)
Eine Funktion f ist stetig an der Stelle x_0, wenn gilt: Für jedes $\epsilon > 0$ $\exists$ ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \ \forall\ x \neq x_0$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Wir fordern also dreierlei:
1. $f(x)$ ist an der Stelle $x = x_0$ definiert.
2. Der Grenzwert an der Stelle x_0 existiert.
3. Grenzwert und Funktionswert stimmen überein.

Kurz: f stetig in $x_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Weiter sagt man f ist stetig auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ wenn f in jedem Punkt $x_0 \in I$ stetig ist.

Beispiele:

1. Monome & Polynome sind überall stetig, rationale Funktionen überall dort, wo der Nenner nicht Null ist.
2. $$f(x) = \frac{1}{x^2} \tag{4.23}$$
   Untersuche Stetigkeit bei $x_0 = 0$:
   $f(0)$ existiert nicht $\quad \Rightarrow \quad$ nicht stetig in 0 (Singularität, Polstelle)
3. $$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases} \tag{4.24}$$

Untersuche Stetigkeit bei $x_0 = 0$:
$f(0) = 0$ existiert
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht, denn

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 1 \qquad \text{aber} \qquad \lim_{x\to 0-} f(x) = -1 \tag{4.25}$$

$\Rightarrow$ nicht stetig in 0 (Sprungstelle)

4.
$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \le 2 \\ x & , \quad x > 2 \end{cases} \tag{4.26}$$

Untersuche Stetigkeit bei $x_0 = 2$:
$f(2) = 1$ existiert,
$\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = 1 = f(2)$,
aber $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = 2$
$\Rightarrow$ nicht stetig in 2 (Sprungstelle)
Merke: *Eine stetige Funktion kann man ohne Absetzen zeichen.*

5.
$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \ne 1 \\ 3 & , \quad x = 1 \end{cases} \tag{4.27}$$

Untersuche Stetigkeit bei $x_0 = 1$:
$f(1) = 3$ existiert,
aber $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$
$\Rightarrow$ nicht stetig in 1

6.
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}\,, \quad x \ne 1 \tag{4.28}$$

Untersuche Stetigkeit bei $x_0 = 1$:
$f(1)$ ist nicht definiert (*0 durch 0* – Definitionslücke), also auch nicht stetig in 1.
Allerdings existiert $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ (s.o.); definiere nachträglich

$$f(1) := 2\,, \tag{4.29}$$

Übrigens, für die so *stetig fortgesetzte* Funktion gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & , \quad x \ne 1 \\ 2 & , \quad x = 1 \end{cases} \\ &= x + 1 \end{aligned} \tag{4.30}$$

7.
$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x < 1 \\ x & , \quad x \ge 1 \end{cases} \tag{4.31}$$

Untersuche Stetigkeit bei $x_0 = 1$:
$f(1) = 1, \qquad \lim\limits_{x\to 1+} = 1 \qquad$ und $\qquad \lim\limits_{x\to 1-} = 1,$
also stetig in 1

Analog zu den Rechenregeln für Grenzwerte gilt:

1. Sind f und g stetig auf $I \subseteq \mathbb{R}$, so sind auch $f+g$, αf $(\alpha \in \mathbb{R})$ und fg stetig. Außerdem ist $\dfrac{f}{g}$ stetig $\forall\, x \in I$ mit $g(x) \neq 0$.

2. Sind $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ stetig auf I bzw. J, und ist $g(J) \subseteq I$, dann ist auch $f \circ g$ stetig auf J.

4.4 Asymptoten

Nähert sich eine Funktion einer Geraden beliebig nahe an, so nennt man die Gerade eine Asymptote der Funktion (bzw. des Funktionsgraphs).

Waagerechte Asymptoten
Gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b\,, \tag{4.32}$$

so hat f eine waagerechte Asymptote $y = a$ bzw. $y = b$.

Senkrechte Asymptoten
Hat f eine Polstelle bei $x = a$, d.h.

$$\lim_{x\to a+} |f(x)| = \infty \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x\to a-} |f(x)| = \infty\,, \tag{4.33}$$

so hat f eine senkrechte Asymptote $x = a$.

Schiefe Asymptoten
Gilt $(a \neq 0)$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0\,, \tag{4.34}$$

so hat f die schiefe Asymptote $g(x) = ax + b$.[5]

Beispiele:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
   waagerechte Asymptote $y = 0$ (x-Achse)
   senkrechte Asymptote $x = 0$ (y-Achse).

2. $f(x) = \dfrac{3x^2+4}{2x^2-x}$
   waagerechte Asymptote $y = \frac{3}{2}$
   senkrechte Asymptoten $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}$

[5] Wir schreiben dafür auch $f(x) \sim ax+b$ und meinen dann nicht nur $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{ax+b} = 1$ (vgl. Abschnitt 3, Stirlingsche Formel) sondern auch $f(x) - ax \sim b$, d.h. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)-ax}{b} = 1$.

3. $f(x) = \dfrac{3x^2+4}{x-1}$
senkrechte Asymptote $x = 1$
schiefe Asymptote... Polynomdivision

$$\begin{array}{l} (\quad 3x^2 \qquad +4) : (x-1) = 3x + 3 + \dfrac{7}{x-1} \\ \underline{-3x^2 + 3x} \\ \qquad\quad 3x + 4 \\ \qquad\ \underline{-3x + 3} \\ \qquad\qquad\quad 7 \end{array} \tag{4.35}$$

schiefe Asymptote $g(x) = 3x + 3$

4.5 Differentiation

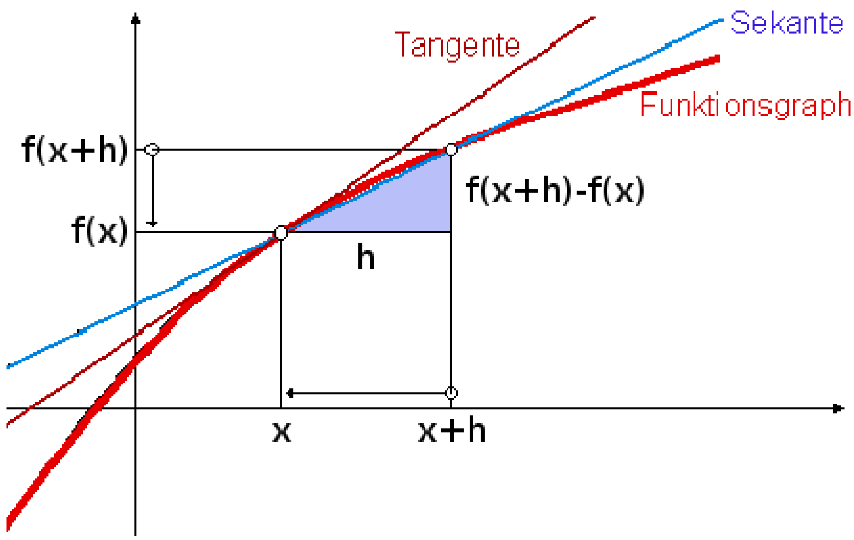
Definition: Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen, $x \in I$. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in x, falls

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{4.36}$$

existiert. Wir nennen dann

$$f'(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{4.37}$$

die Ableitung von f an der Stelle x. Ist f $\forall$ $x \in I$ differenzierbar, so heißt f auf I differenzierbar.



Anschaulich: $f'(x)$ ist die Steigung der Tangente an f im Punkt $(x, f(x))$.

Analog für höhere Ableitungen:

$$\begin{aligned} f''(x) &= f^{(2)}(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 f(x) \\ f''' &= f^{(3)} = \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned} \tag{4.38}$$

Bemerkung: Damit die Ableitung existieren kann, muss (notwendigerweise)

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

gelten. (Stetigkeit in x)

Beispiele:

1. $f : x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}_0$

   $n = 0$: $f(x) \equiv 1$
   $\Rightarrow f(x+h) - f(x) = 0 \ \forall h$ und $\forall x$
   $\Rightarrow f'(x) \equiv 0$

   beliebige $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^{n-\nu}\, h^{\nu} - x^n\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} x^{n-\nu}\, h^{\nu-1} = \lim_{h\to 0} \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n}{\nu+1} x^{n-\nu-1}\, h^{\nu} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{n}{\nu+1} x^{n-\nu-1}\, h^{\nu}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0}\right] \\ &= n\, x^{n-1} \end{aligned} \tag{4.39}$$

   Gilt übrigens sogar für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, z.B. $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}}\left(\frac{-\cancel{h}}{x(x+h)}\right) = -\frac{1}{x^2} \end{aligned} \tag{4.40}$$

2.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases} \tag{4.41}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases} \tag{4.42}$$

$f'(0)$ existiert nicht.

3. $1 \leq k < n$, $f(x) = x^n$

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= n(n-1)\cdots(n-k+1)\; x^{n-k} \\ &= \binom{n}{k}\, k!\; x^{n-k} \end{aligned} \tag{4.43}$$

Satz 3. (Differentiationsregeln)
Seien f und g in x differenzierbar. Dann gilt
(i) *Linearität: $af + bg$ ist differenzierbar in x $\forall\; a, b \in \mathbb{R}$, und es gilt*

$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x) \tag{4.44}$$

(ii) *Produktregel: $f \cdot g$ ist differenzierbar in x, und es gilt*

$$(fg)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x) \tag{4.45}$$

(iii) *Kettenregel*
Sei f differenzierbar in $g(x) \Rightarrow f \circ g$ ist differenzierbar in x mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(g(x)) = f'(g(x))\, g'(x) \tag{4.46}$$

Beweise folgen direkt aus Rechenregeln für Grenzwerte (i); oder gleich mit Klein-o (i)–(iii).
Bemerkung: Aus (iii) und der Ableitung von $\frac{1}{x}$ folgt

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \qquad \text{(falls } g(x) \neq 0\text{)} \tag{4.47}$$

und daraus mit (ii)

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\,\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad \text{(Quotientenregel)} \tag{4.48}$$

Beispiele:

1. $\big((x^2+1)^5 + 7x\big)' \underset{\text{(i)}}{=} \big((x^2+1)^5\big)' + 7 \underset{\text{(iii)}}{=} 5(x^2+1)^4\,(2x) + 7$

2. $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \quad x > 0 \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$
definiere $g(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad g \circ f$ existiert

$$g(f(x)) = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x\,, \qquad x > 0 \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (g \circ f)'(x) &= 1 \\ &\underset{\text{(iii)}}{=} g'(f(x))\, f'(x) = n[f(x)]^{n-1}\, f'(x) = n x^{\frac{n-1}{n}}\, f'(x) \\ \Rightarrow \qquad f'(x) &= \frac{1}{n}\, x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1} \end{aligned} \tag{4.50}$$

3.
$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}\,, \qquad f'(x) \underset{\text{(iii)}}{=} -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \tag{4.51}$$

4.5.1 Alternative Definition mit Klein-o

Differenzierbarkeit von f in x_0 bedeutet Approximierbarkeit in der Nähe von x_0 durch eine Gerade, nämlich die Tangente t im Punkt $(x_0, f(x_0))$,

$$t(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,. \tag{4.52}$$

Lemma 4. *f diffbar in x_0 $\Leftrightarrow \exists\, a \in \mathbb{R}$, so dass*

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0)\,, \quad x \to x_0\,. \tag{4.53}$$

Wir nennen dann $a = f'(x_0)$ die Ableitung von f an der Stelle x_0.

Dabei sagen wir $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$, falls gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0\,. \tag{4.54}$$

Beispiele:

1. $x^2 = o(x)$, $x \to 0$
2. $x^3 = o(x)$, $x \to 0$
3. $x = o(x^2)$, $x \to \infty$
4. $\mathrm{e}^{-x} = o(x^{-n})$, $x \to \infty$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (Beweis später)
5. $x = o(1)$, $x \to 0$
6. $x\, o(x) = o(x^2)$, $x \to 0$
   Was bedeutet diese Gleichung eigentlich?
   Jedes Klein-o, das irgendwo auftaucht, ist ein Platzhalter für eine Funktion, die wir nicht genau kennen, oder die wir nicht genauer angeben wollen, für die wir aber etwas über ihr Verhalten in einem bestimmten Limes wissen.
   In Worten bedeutet $x\, o(x) = o(x^2)$, $x \to 0$, also:

Wenn $g(x)$ für $x \to 0$ schneller verschwindet als x,
dann verschwindet $x\,g(x)$ für $x \to 0$ sogar schneller als x^2.

Und wie zeigt man das? Zum Beispiel so (hier alles für $x \to 0$):

$$g(x) = o(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{x\,g(x)}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\,g(x) = o(x^2)$$

Und nachdem wir so etwas einmal gezeigt haben, merken wir uns, dass wir mit diesem Argument beliebig Faktoren in das Argument des Klein-o hinein (oder aus ihm heraus) ziehen dürfen.

7. Analog zeigt man auch $o(x) + o(x^2) = o(x)$, $x \to 0$ oder $o(x)\,o(x) = o(x^2)$ (siehe Übungen). Zusammen können wir das dann z.B. wie folgt verwenden:
$\big(1 + x + o(x)\big)\big(5 - x + o(x)\big) = 5 + 4x + o(x)$, $x \to 0$, denn

$$[1+x+o(x)][5-x+o(x)] = 5+(5-1)x \underbrace{\underbrace{-x^2}_{o(x)} + \underbrace{(1+x)o(x)}_{=o(x)+o(x^2)} + \underbrace{(5-x)o(x)}_{=o(x)+o(x^2)} + \underbrace{o(x)\,o(x)}_{=o(x^2)}}_{=o(x)}$$

Beweis von Lemma 4

$$\begin{aligned}
& & f(x) &= f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0) & & \big|\, - f(x_0)\\
\Leftrightarrow & & f(x) - f(x_0) &= a(x - x_0) + o(x - x_0) & & \big|\, : (x - x_0)\\
\Leftrightarrow & & \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= a + o(1) & &\\
\Leftrightarrow & & \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= a\,, & &
\end{aligned}$$

d.h. "$\Rightarrow$" wenn f diffbar in x_0, dann $\exists$ so ein a, und $a = f'(x_0)$,
"$\Leftarrow$" wenn so ein a existiert, dann ist f diffbar in x_0, und $f'(x_0) = a$.

Beispiele:

1. Beweis der Kettenregel. (Satz 3 (iii))
Sei $f(x) = g(h(x))$, h diffbar in x_0 und g diffbar in $y_0 := h(x_0)$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= g\big(\underbrace{h(x_0) + h'(x_0)\,(x - x_0) + o(x - x_0)}_{=:y}\big) && \text{(da h diffbar in x_0)}\\
&= g(y_0) + g'(y_0)\,(y - y_0) + o(y - y_0) && \text{(da g diffbar in y_0)}\\
&= g(h(x_0)) + g'(h(x_0))\big(h'(x_0)\,(x - x_0) + o(x - x_0)\big) + \underbrace{o\big(h'(x_0)\,(x - x_0) + o(x - x_0)\big)}_{=o(x-x_0)}\\
&= \underbrace{g(h(x_0))}_{f(x_0)} + \underbrace{g'(h(x_0))h'(x_0)}_{f'(x_0)}(x - x_0) + \underbrace{g'(h(x_0))o(x - x_0) + o(x - x_0)}_{=o(x-x_0)} && \Box
\end{aligned} \tag{4.55}$$

2. l'Hospitalsche Regel.[6] Wir suchen

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{“}\,\frac{0}{0}\,\text{”}\,, \tag{4.56}$$

also $f(x_0) = 0 = g(x_0)$. Falls f und g diffbar in x_0 und $g'(x_0) \neq 0$, so gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\cancelto{0}{f(x_0)} + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)}{\cancelto{0}{g(x_0)} + g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_0) + o(1)}{g'(x_0) + o(1)} \\
&= \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\,.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Gilt analog für[7]

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{“}\,\frac{\infty}{\infty}\,\text{”}\,. \tag{4.58}$$

Beweis der Kettenregel und Asymptoten (Abschnitt 4.4) kommen noch.

[6] Die eigentlich auf Johann Bernoulli zurückgeht…

[7] Denn $(\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty)$

$$\begin{aligned}
\alpha := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \qquad \left(\text{vom Typ “}\,\frac{0}{0}\,\text{”}\right) \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{g'(x)}{(g(x))^2}}{\frac{f'(x)}{(f(x))^2}} = \lim_{x\to x_0} \frac{(f(x))^2 g'(x)}{(g(x))^2 f'(x)} = \alpha^2 \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} \\
\Rightarrow \quad \alpha &= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{(falls existent!)}
\end{aligned}$$

4.6 Die Exponentialfunktion

Eulersche Zahl:

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{4.59}$$

Wir zeigen zunächst, dass a_n nach oben und unten beschränkt ist:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + 1 = 2 \qquad \text{(Bernoullische Ungleichung, Satz 2)} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left(\frac{1}{n}\right)^{\nu} \qquad \text{(Binomi, Satz 1)} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)}{n^{\nu}}}_{\leq 1} \frac{1}{\nu!} \\
&\leq \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu!} \\
&\underset{(*)}{\leq} 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2^{\nu-1}} = 1 + \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \qquad \text{(geom. Summe)} \\
&\leq 1 + 2 = 3
\end{aligned} \tag{4.61}$$

In $(*)$ haben wir verwendet, dass $\nu! \geq 2^{\nu-1}$ für $\nu \geq 1$.
Beweis dafür: (vollständige Induktion)
$\nu = 1$: $1! = 1 = 2^0$
$\nu \to \nu + 1$: $(\nu+1)! = (\nu+1) \cdot \nu! \underset{\text{I.V.}}{\geq} (\nu+1) \cdot 2^{\nu-1} \underset{\nu \geq 1}{\geq} 2^{\nu}$. $\square$

Bis jetzt wissen wir also:

$$2 \leq a_n \leq 3 \tag{4.62}$$

Jetzt zeigen wir noch, dass a_n monoton wachsend ist, d.h. z.z. ist $a_{n+1} \geq a_n$ bzw. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} &= \frac{(n+1+1)^{n+1}\, n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\, (n+1)^{n+1}} \frac{n+1}{n} \\
&= \frac{n+1}{n} \left(\frac{(n+1+1)(n+1-1)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\
&= \frac{n+1}{n} \left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\
&\geq \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \qquad \text{(Bernoullische Ungleichung, Satz 2)}
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Die Folge a_n wächst monoton und ist nach oben beschränkt – es bleibt ihr nichts anderes übrig, als zu konvergieren. Den Grenzwert nennen wir e (Eulersche Zahl), und wir wissen bereits

$$2 \leq \mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3 \tag{4.64}$$

Numerisch findet man $\mathrm{e} = 2,718281828459\ldots$

Exponentialfunktion: Wir definieren

$$\exp(x) := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{4.65}$$

und schreiben später auch $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.
(Dass e^x eine berechtige Schreibweise ist, ist erst noch zu zeigen – vgl. Satz 5, (ii).)

Bemerkungen:

1. Analog zu oben zeigt man auch hier, dass die Folge für alle $x \in \mathbb{R}$ monoton wächst und beschränkt ist $\Rightarrow$ Konvergenz. (Details nicht schwierig, nur unhübsch)[8]

2. $\exp(0) = 1$ (offensichtlich)

3. $$\exp(x) \geq 1 + x\,, \tag{4.66}$$

8

$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| \leq \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left|\frac{x}{n}\right|^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)}{n^\nu}}_{\leq 1} \frac{|x|^\nu}{\nu!}$$

$$\leq \sum_{\nu=0}^{n} \frac{|x|^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{N-2} \frac{|x|^\nu}{\nu!} + \sum_{\nu=N-1}^{n} \frac{|x|^\nu}{\nu!}$$

$$\underset{(+)}{\leq} \sum_{\nu=0}^{N-2} \frac{|x|^\nu}{\nu!} + \sum_{\nu=N-1}^{n} \frac{|x|^\nu}{N^{\nu-N+1}} = \sum_{\nu=0}^{N-2} \frac{|x|^\nu}{\nu!} + \sum_{\nu=0}^{n-N+1} \frac{|x|^{\nu+N-1}}{N^\nu} = \sum_{\nu=0}^{N-2} \frac{|x|^\nu}{\nu!} + |x|^{N-1} \frac{1-\left(\frac{|x|}{N}\right)^{n-N+2}}{1-\frac{|x|}{N}}$$

$$\leq \sum_{\nu=0}^{N-2} \frac{|x|^\nu}{\nu!} + |x|^{N-1} \frac{N}{N-|x|}\,, \qquad (+): \quad \nu! \geq N^{\nu-N+1} \quad \text{für } \nu \geq N-1 \qquad \text{(vollst. Ind.)}\,,$$

also nach oben beschränkt, da Ergebnis nicht von n abhängt
(N wird allein durch x festgelegt, $|x| < N \leq n$)

$$\frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{(n+1+x)^{n+1}\, n^n}{(n+x)^n\,(n+1)^{n+1}} = \frac{n+x}{n}\left(\frac{n^2+n+nx}{n^2+nx+n+x}\right)^{n+1} = \frac{n+x}{n}\left(1-\frac{x}{n^2+nx+n+x}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{n+x}{n}\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \geq \frac{n+x}{n}\left(1-\frac{x}{(n+x)}\right) = 1$$

(Bernoulli klappt wieder für $|x| < n$, also für hinreichend große n.)

denn

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1+x\,, \quad \text{falls} \quad x>-n\,, \qquad \text{(Bernoulli)} \tag{4.67}$$

d.h. falls n groß genug; $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n \geq 1+x$.

4.
$$\exp(x) \leq x\exp(x)+1 \tag{4.68}$$

bzw. $\exp(x)\cdot(1-x)\leq 1$. Beweis:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n(1-x) \underset{(*)}{\leq} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\,, \tag{4.69}$$

wobei $(*)$: Bernoulli, falls n groß genug.
Für hinreichend große n gilt weiter

$$0 \leq \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) \leq 1 \tag{4.70}$$

und damit auch die Potenz, und für $n\to\infty$ folgt die Behauptung.

5.
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n^2}\right)^n = 1 \tag{4.71}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{n^2}\right)^n &= \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\left(\frac{x}{n^2}\right)^\nu = 1+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{n^\nu}\binom{n}{\nu}\left(\frac{x}{n}\right)^\nu \\ &\leq 1+\frac{1}{n}\underbrace{\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}\left(\frac{x}{n}\right)^\nu}_{\text{beschränkt durch }\exp(x)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1\end{aligned} \tag{4.72}$$

Analog gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n^{1+\epsilon}}\right)^n = 1\ \forall\,\epsilon>0$.

Satz 5. (Eigenschaften der Exponentialfunktion)

(i) $\exp(0)=1$

(ii) *Funktionalgleichung* $\quad \exp(x)\exp(y)=\exp(x+y)$

(iii) $\exp(x)>0 \quad \forall\,x\in\mathbb{R}$

(iv) exp *ist streng monoton wachsend, d.h.*

$$x>y \quad \Rightarrow \quad \exp(x)>\exp(y) \tag{4.73}$$

(v) exp *ist stetig* $\forall\,x\in\mathbb{R}$

(vi) exp *ist diffbar* $\forall\, x \in \mathbb{R}$ *mit* $\exp' = \exp$

(vii) $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ *und* $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

(viii) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty$ *und* $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^n \exp(x) = 0$

Beweise:

(i) klar lt. Def.

(ii)

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(x)\exp(y)\\ &= \left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n \underbrace{\left(1+\frac{xy}{n^2\left(1+\frac{x+y}{n}\right)}\right)^n}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ (Bem. 5)}}\\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(x+y)\end{aligned} \tag{4.74}$$

(iii) $x \geq 0$: $\mathrm{e}^x > 0$ (lt. Def.) $\Rightarrow \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} > 0$, d.h. $\mathrm{e}^x > 0$ auch für $x < 0$

Bemerkung: Aus der Definition von exp (oder aus Bem. 3) folgt sogar $\mathrm{e}^x > 1\ \forall\, x > 0$.

(iv) $x < y$: $\quad \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{y+x-x} = \mathrm{e}^x \underbrace{\mathrm{e}^{y-x}}_{>1} > \mathrm{e}^x$

(v) z.z.: $\lim\limits_{h\to 0} \mathrm{e}^{x+h} = \mathrm{e}^x$

$$\lim_{h\to 0} \mathrm{e}^{x+h} = \mathrm{e}^x \lim_{h\to 0} \mathrm{e}^h \tag{4.75}$$

z.z. bleibt Stetigkeit bei Null.
Für $|h| < 1$ gilt lt. Bem. 3 und 4:

$$\underbrace{1+h}_{\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1} \;\leq\; \mathrm{e}^h \;\leq\; \frac{1}{\underbrace{1-h}_{\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1}}, \tag{4.76}$$

also auch $\lim\limits_{h\to 0} \mathrm{e}^h = 1$.

(vi)

$$\frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^x}{h} = \mathrm{e}^x\,\frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} \tag{4.77}$$

d.h. e^x diffbar in $x \Leftrightarrow \mathrm{e}^x$ diffbar in Null.

Wieder lt. Bem. 3 und 4 gilt für $h > 0$:

$$\frac{1+h-1}{h} \le \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} \le \frac{h\mathrm{e}^h + 1 - 1}{h}$$
$$\text{d.h.} \qquad 1 \le \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} \le \mathrm{e}^h \xrightarrow[h\to 0]{} 1\,, \tag{4.78}$$

also $\lim\limits_{h\to 0+} \frac{\mathrm{e}^h-1}{h} = 1$ (und analog für $h < 0$).

(vii) lt. Bem 3 gilt: $\mathrm{e}^x \ge (1+x) \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$

und auch $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$

(viii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} \underset{\text{l'H.}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{nx^{n-1}} \underset{\text{l'H.}}{=} \ldots = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{n!} = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^n \mathrm{e}^x = \lim\limits_{x\to\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$

4.7 Umkehrfunktionen

Definition: $f : A \to B$ (z.B. $A, B \subseteq \mathbb{R}$) heißt
– surjektiv, falls jedes $b \in B$ als Bild auftritt ($b \in B \;\Rightarrow\; \exists a \in A$ mit $f(a) = b$),
– injektiv, falls: $a \neq \tilde{a} \Rightarrow f(a) \neq f(\tilde{a}) \;\forall\, a, \tilde{a} \in A$,
– bijektiv, falls f surjektiv und injektiv ist.

Bemerkungen:

1. $f : A \to B$ nicht surjektiv – "heilbar", denn

$$\tilde{B} := f(A) = \{b \in B \,|\, \exists\, a \in A, \text{ so dass } f(a) = b\} \tag{4.79}$$

$\Rightarrow f : A \to \tilde{B}$ ist surjektiv. Z.B.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{4.80}$$

ist nicht surjektiv, denn $-1 \in B = \mathbb{R}$ tritt nicht als Funktionswert auf.
$f(A) = \mathbb{R}_0^+$, und damit ist

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{4.81}$$

surjektiv.

2. fehlende Injektivität ist kritischer, z.B.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{4.82}$$

ist nicht injektiv, denn $(-1)^2 = 1^2$ aber $-1 \neq 1$.

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}_0^+ &\to \mathbb{R}_0^+ \quad , & f_2 : \mathbb{R}_0^- &\to \mathbb{R}_0^+ & (4.83)\\ x &\mapsto x^2 & x &\mapsto x^2 & (4.84)\end{aligned}$$

sind injektiv (und bijektiv).

3. Ist $f : A \to B$ bijektiv, so existiert in natürlicher Weise eine Funktion

$$\begin{aligned} f^{-1}: \quad B \quad &\to A \\ b = f(a) &\mapsto a \end{aligned} \tag{4.85}$$

genannt Umkehrfunktion von f. $\left(f^{-1} \neq \frac{1}{f}\right)$

4. $f : A \to B$ bijektiv
   $\Rightarrow$ es existiert $f^{-1} : B \to A$
   d.h. $f^{-1} \circ f : A \to A$ sowie $f \circ f^{-1} : B \to B$
   mit $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \; \forall \; x \in A$
   und $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x \; \forall \; x \in B$
5. Der Graph von f^{-1} ist der Graph von f gespiegelt an der ersten Winkelhalbierenden.
6. Streng monotone Funktionen sind injektiv.
7. Sei $f : A \to B$ diffbar, dann gilt

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \; \forall \; x \in I \subseteq A \quad &\Rightarrow \quad f \text{ ist streng monoton wachsend auf } I \\ f'(x) < 0 \; \forall \; x \in I \subseteq A \quad &\Rightarrow \quad f \text{ ist streng monoton fallend auf } I \end{aligned} \tag{4.86}$$

Beispiele:

1.

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}_0^+ &\to \mathbb{R}_0^+ \quad , & f_1^{-1} : \mathbb{R}_0^+ &\to \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto x^2 & x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned} \tag{4.87}$$

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}_0^- &\to \mathbb{R}_0^+ \quad , & f_2^{-1} : \mathbb{R}_0^+ &\to \mathbb{R}_0^- \\ x &\mapsto x^2 & x &\mapsto -\sqrt{x} \end{aligned} \tag{4.88}$$

$$f_2^{-1} \circ f_2 : \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}_0^- \quad , \qquad f_2 \circ f_2^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \tag{4.89}$$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \qquad \Rightarrow \qquad f^{-1} = f$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$

$$f'(x) = 2x + 1 \; : \qquad \begin{aligned} f'(x) > 0 \quad \forall \quad x > -\frac{1}{2} \\ f'(x) < 0 \quad \forall \quad x < -\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{4.90}$$

$$f(-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{4}\,, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} = \infty\,, \qquad f \text{ stetig} \tag{4.91}$$

$\Rightarrow$ jedes $y \in [-\frac{1}{4}, \infty)$ tritt als Funktionswert auf; d.h.

$$f_1 : [-\tfrac{1}{2}, \infty) \to [-\tfrac{1}{4}, \infty) \qquad \text{und} \qquad f_2 : (-\infty, -\tfrac{1}{2}] \to [-\tfrac{1}{4}, \infty)\,, \tag{4.92}$$

beide mit derselben Abbildungsvorschrift wie f, sind surjektiv
und (da monoton) auch injektiv, d.h. bijektiv.

$$\Rightarrow \qquad f_1^{-1} : [-\tfrac{1}{4}, \infty) \to [-\tfrac{1}{2}, \infty) \qquad \text{und} \qquad f_2^{-1} : [-\tfrac{1}{4}, \infty) \to (-\infty, -\tfrac{1}{2}] \tag{4.93}$$

Wie sehen die f_j^{-1} aus?
Nenne $y = f(x)$, und da $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ gilt $f^{-1}(y) = x$.
Löse also $y = f(x)$ nach x auf!

$$y = x^2 + x \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + x - y = 0 \tag{4.94}$$

quadratische Gleichung: $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4y}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{y + \frac{1}{4}}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad f_1^{-1}(x) &= -\tfrac{1}{2} + \sqrt{x + \tfrac{1}{4}} \\ f_2^{-1}(x) &= -\tfrac{1}{2} - \sqrt{x + \tfrac{1}{4}} \end{aligned} \tag{4.95}$$

Satz 6. (Ableitung der Umkehrfunktion)
Ist $f : I \to J$ bijektiv und diffbar, dann folgt
$f^{-1} : J \to I$ ist diffbar $\forall\ x \in J$ mit $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ und es gilt

$$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\,. \tag{4.96}$$

Beweis:
Man zeigt zunächst, dass f^{-1} diffbar ist (ohne Beweis).
Dann wenden wir auf $f(f^{-1}(x)) = x$ die Kettenregel an,

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot f^{-1\prime}(x) = 1\,. \tag{4.97}$$

Mit Division durch $f'(f^{-1}(x))$ (das war $\neq 0$) folgt die Behauptung. □

4.8 Der Logarithmus

Definition: Die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ heißt (natürlicher) Logarithmus,

$$\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \tag{4.98}$$

Manchmal schreibt man statt log auch ln (*logarithmus naturalis*).

also: $\quad \mathrm{e}^{\log x} = x$ für $x > 0 \qquad$ und $\qquad \log(\mathrm{e}^x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung:
e^x ist injektiv, da streng monoton wachsend

$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0, \qquad \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$

$\Rightarrow \quad \exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$

Satz 7. (Eigenschaften von $\log$**)**

(i) $\log 1 = 0, \quad \log \mathrm{e} = 1$

(ii) $\log(xy) = \log x + \log y$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0+} \log x = -\infty, \qquad \lim\limits_{x\to\infty} \log x = \infty$

(iv) $(\log x)' = \frac{1}{x} \quad , \ x > 0$
$\Rightarrow \quad \log x$ *ist streng monoton wachsend*

Beweis:

(i) $\mathrm{e}^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \log 1 = 0$
$\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad \log \mathrm{e} = 1$

(ii) $\mathrm{e}^{\log x + \log y} = \mathrm{e}^{\log x}\, \mathrm{e}^{\log y} = xy = \mathrm{e}^{\log(xy)}$
Da e^x injektiv folgt Behauptung.

(iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0+} \log x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} \log x = \infty$

(iv) e^x diffbar und $(\mathrm{e}^x)' > 0$, also insbesondere $\neq 0$

$\underset{\text{Satz 6}}{\Longrightarrow} \quad \log x$ ist diffbar, mit

$$(\log x)' = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}\,. \tag{4.99}$$

4.9 Weitere elementare Funktionen

Allgemeine Exponentialfunktion

Für $a > 0$, definieren wir

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto a^x := \mathrm{e}^{x \log a} \,. \end{aligned} \tag{4.100}$$

Es gilt dann

$$\log(a^x) = \log\left(\mathrm{e}^{x \log a}\right) = x \log a \,. \tag{4.101}$$

Umkehrfunktion: **Logarithmus zur Basis** a

Für $a > 0$, $a \neq 1$ definieren wir

$$\begin{aligned} \log_a :\ \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a x := \frac{\log x}{\log a} \,. \end{aligned} \tag{4.102}$$

Denn, z.B.,

$$\log_a(a^x) = \frac{\log(a^x)}{\log a} = \frac{x \log a}{\log a} = x \,. \tag{4.103}$$

Also: $\log_{\mathrm{e}} = \log = \ln$.
Auch gebräuchlich: $\mathrm{lb} := \log_2$, $\mathrm{ld} := \log_2$, $\mathrm{lg} := \log_{10}$.

Allgemeine Potenz Für $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^\alpha := \mathrm{e}^{\alpha \log x} \,. \end{aligned} \tag{4.104}$$

Umkehrfunktion (falls $\alpha \neq 0$):

$$x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}} \tag{4.105}$$

Hyperbolische Funktionen. Siehe Übungen.

Eigenschaften und Rechenregeln. $x \in \mathbb{R}^+$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

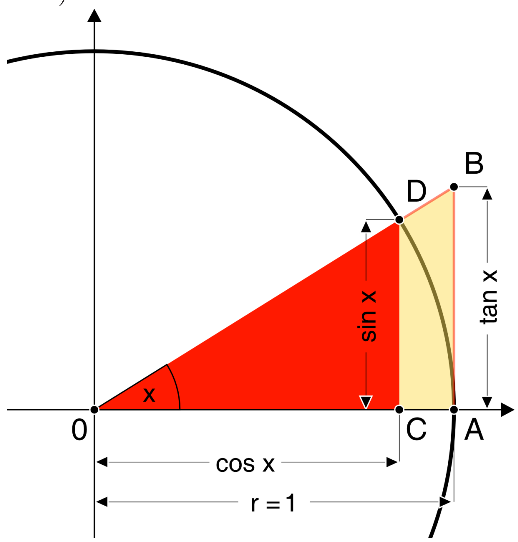
1. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
2. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \, x^\beta$
3. $\log(x^\alpha) = \alpha \log x$

Bemerkungen zur Notation:

$$x^{\alpha^\beta} = x^{(\alpha^\beta)} \,, \qquad \log x^\alpha = \log(x^\alpha) \tag{4.106}$$

4.10 Trigonometrische Funktionen

Einheitskreis (Kreis mit Radius 1)
Umfang 2π (Definition von π)



definiert $\sin x$ und $\cos x$ für $0 \leq x < 2\pi$
2π-periodisch fortgesetzt, d.h.

$$\sin(x + 2\pi n) = \sin(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z}\,. \tag{4.107}$$

(ebenso für cos)

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{und} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}\,, \tag{4.108}$$

wo definiert.

Spezielle Werte:

$$\begin{aligned} \sin 0 &= 0\,, & \cos 0 &= 1 \\ \sin\frac{\pi}{2} &= 1\,, & \cos\frac{\pi}{2} &= 0 \end{aligned} \tag{4.109}$$

Translationen:

$$\sin(x+\pi) = -\sin x \qquad \cos(x+\pi) = -\cos x \tag{4.110}$$

$$\sin(x+\tfrac{\pi}{2}) = \cos x \qquad \cos(x+\tfrac{\pi}{2}) = -\sin x \tag{4.111}$$

Weitere wichtige Beziehungen:

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \;\forall\; x$ (Pythagoras)
   und damit auch $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1 \;\forall\; x \in \mathbb{R}$
2. $\sin(-x) = -\sin x$, $\quad \cos(-x) = \cos x$

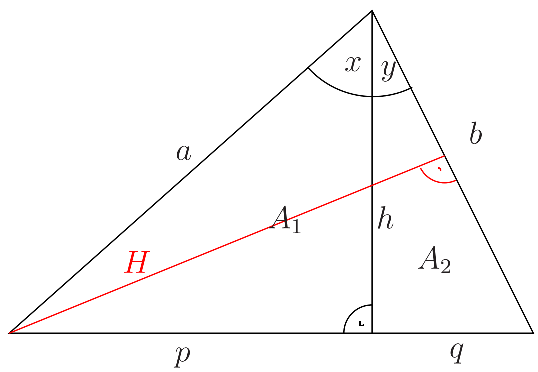
3. Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gilt (siehe Abbildung):

$$\sin x < x < \tan x\,.$$

Satz 8. (Additionstheoreme)

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned} \tag{4.112}$$

Beweis:
Laut Translationseigenschaften genügt es, die Additionstheoreme für $x, y > 0$, $x + y < \frac{\pi}{2}$ zu beweisen.



$$\begin{aligned} h &= a\cos x\,, & h &= b\cos y \\ p &= a\sin x\,, & q &= b\sin y \\ A_1 &= \frac{ph}{2} = \frac{ab\sin x\cos y}{2}\,, & A_2 &= \frac{qh}{2} = \frac{ab\cos x\sin y}{2} \end{aligned} \tag{$*$}$$

$$A_1 + A_2 = \frac{Hb}{2} = \frac{ab\sin(x+y)}{2} \tag{$+$}$$

$(*)$ und $(+)$ $\Rightarrow$ Behauptung

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \sin(x + y + \tfrac{\pi}{2}) \\ &= \sin x \cos(y + \tfrac{\pi}{2}) + \cos x \sin(y + \tfrac{\pi}{2}) \\ &= \sin x(-\sin y) + \cos x \cos y \end{aligned} \tag{4.113}$$

$\square$

Korollar zu Satz 8.

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \text{und} \qquad (\cos x)' = -\sin x \tag{4.114}$$

Beweis: (für $\sin x$; $\cos x$ folgt aus $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$)

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\ &= \sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\end{aligned} \tag{4.115}$$

reduziert auf Ableitungen von sin und cos bei Null.
Aus Beziehung 3 folgt für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (Kehrwerte):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\tan x}\\ \Rightarrow \quad & 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 1\end{aligned} \tag{4.116}$$

und damit

$$\lim_{h\to 0+}\frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \text{(analog für } h\to 0-) \tag{4.117}$$

Der andere Limes wird Null:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-\sin^2 h}-1}{h}\,\frac{\sqrt{1-\sin^2 h}+1}{\sqrt{1-\sin^2 h}+1}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(1-\sin^2 h)-1}{h\left(\sqrt{1-\sin^2 h}+1\right)}\\ &= -\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{\sqrt{1-\sin^2 h}+1}\right)\\ &= -1\cdot\frac{0}{2} = 0\end{aligned} \tag{4.118}$$

□

Die Umkehrfunktion des *Sinus* heißt *Arcus Sinus*, z.B.

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \qquad \text{(Hauptzweig)} \tag{4.119}$$

... anderer Zweig: $[-1,1] \to [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

... viele Zweige: $[-1,1] \to [\frac{2n-1}{2}\pi, \frac{2n+1}{2}\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$

Hauptzweige der anderen trigonometrischen Funktionen:

$$\begin{aligned}\arccos &: [-1,1] \to [0,\pi]\\ \arctan &: \mathbb{R} \to (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\\ \text{arccot} &: \mathbb{R} \to (0,\pi)\end{aligned} \tag{4.120}$$

Ableitungen (Hauptzweige): (mit Satz 6)

$$
\begin{aligned}
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(\arccos x)' &= \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= 1 + \tan^2 x \\
(\arctan x)' &= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned} \tag{4.121}
$$

4.11 Potenzreihen

Beispiel: Die endliche geometrische Reihe war $(x \neq 1)$

$$\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\,. \tag{4.122}$$

Für $|x| < 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, und damit

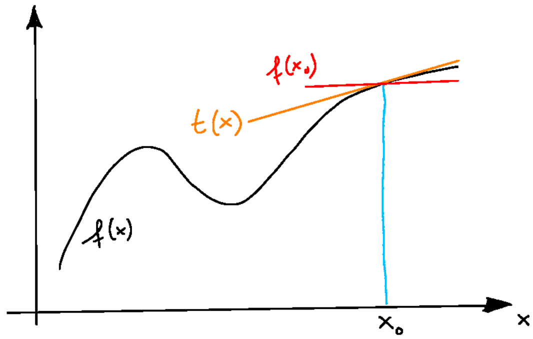
$$\sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu = \frac{1}{1-x}\,, \tag{4.123}$$

wobei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu := \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu$, d.h. wir untersuchen das Verhalten der Folge der Partialsummen, $s_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu$ für $n \to \infty$.

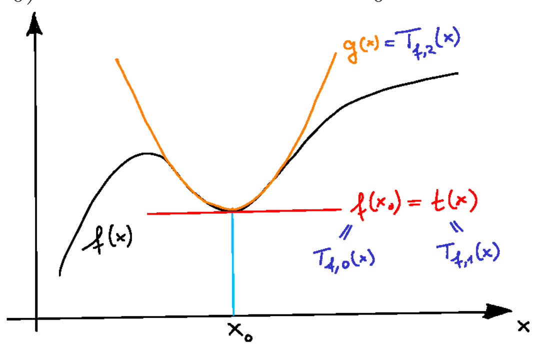
$$
\begin{aligned}
\text{Reihe:} \quad & \sum_{n=m}^{\infty} a_n \quad \text{(Summe mit Grenze } \infty) \\
\text{Potenzreihe in } x\text{:} \quad & \sum_{n=m}^{\infty} a_n\, x^n \\
& \text{oder auch } \sum_{n=m}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n \text{ mit festem } x_0 \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{4.124}
$$

Allgemeine Idee: Suche Approximation für Funktion f in der Nähe von x_0 (so oft diffbar wie nötig):

- f stetig in $x_0 \Rightarrow$ kann dort nicht springen – einfachste Näherung: $f(x) \approx f(x_0)$ für x in der Nähe von x_0



- f diffbar $\Rightarrow$ Tangente an der Stelle x_0 existiert – etwas bessere Näherung: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ für x in der Nähe von x_0



- Näherung, $g(x)$, soll auch Änderung der Steigung (f'') berücksichtigen – Ansatz:

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + c(x - x_0)^2 \tag{4.125}$$

Offensichtlich gilt bereits $f(x_0) = g(x_0)$ und $f'(x_0) = g'(x_0)$. Bestimme c aus Forderung

$$f''(x_0) \stackrel{!}{=} g''(x_0) \tag{4.126}$$

$$g''(x) = 2c \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{f''(x_0)}{2}\,. \tag{4.127}$$

Höhere Näherungen: Ansatz,

$$T_{f,n}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu (x - x_0)^\nu \tag{4.128}$$

und bestimme die c_ν aus Forderungen

$$f^{(\mu)}(x_0) \stackrel{!}{=} {T_{f,n}}^{(\mu)}(x_0)\,, \qquad \mu = 0, \ldots, n \tag{4.129}$$

$$\begin{aligned} {T_{f,n}}^{(\mu)}(x) &= \sum_{\nu=\mu}^{n} \nu(\nu-1)\cdots(\nu-\mu+1)\, c_\nu\, (x - x_0)^{\nu-\mu} \\ \Rightarrow \quad {T_{f,n}}^{(\mu)}(x_0) &= \mu!\, c_\mu \end{aligned} \tag{4.130}$$

d.h. wir erhalten

$$c_\nu = \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} \tag{4.131}$$

Wir nennen

$$T_{f,n}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^\nu \tag{4.132}$$

das n-te Taylor-Polynom von f und

$$T_f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^\nu \tag{4.133}$$

die (formale) Taylor-Reihe von f.

Fragen:

- Ist $T_{f,n}(x)$ eine gute Näherung für $f(x)$ in der Nähe von x_0?
- Konvergiert $T_f(x)$? (Und für welche x, und gegen welchen Wert?)

Vermutung: Nächster Term der Entwicklung als Maß für den Fehler …?

Satz 9. (Satz von Taylor)
Sei $f : I \to \mathbb{R}$, $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $n + 1$ mal diffbar. Dann gilt für $x, x_0 \in I$

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^\nu + R_n(x)\,, \tag{4.134}$$

und für $x > x_0$ $\exists\, \xi \in (x_0, x)$ (für $x < x_0$ $\exists\, \xi \in (x, x_0)$) mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}\,. \tag{4.135}$$

R_n heißt (Lagrangesches) Restglied, x_0 heißt Entwicklungspunkt.

(momentan ohne Beweis)

Bemerkungen:

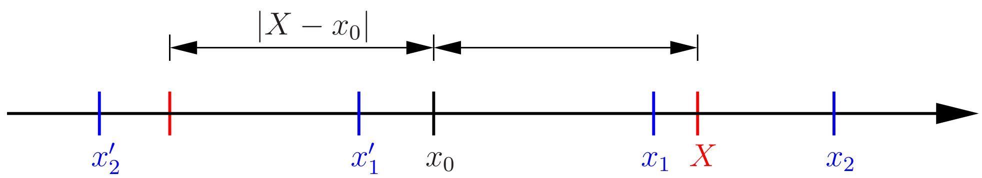
1. Insbesondere gilt $f(x) = T_{f,n}(x) + o((x - x_0)^n)$.
2. Es gibt auch andere Restgliedformeln (z.B. später Integralrestglied, dann mit Beweis).
3. $T_f(x)$ konvergiert also genau dann gegen $f(x)$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad \text{bzw. wenn} \qquad \lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0\,. \tag{4.136}$$

4. Falls $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(x)| > 0$ (oder gar nicht existent), dann divergiert $T_f(x)$ (meistens) oder konvergiert gegen eine andere Funktion (selten).

5. Sei $|x_1 - x_0| < |X - x_0| < |x_2 - x_0|$, dann gilt:

$$\begin{aligned} &\text{aus} \quad \lim_{n\to\infty} |R_n(X)| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |R_n(x_1)| = 0 \\ &\text{aus} \quad \lim_{n\to\infty} |R_n(X)| > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |R_n(x_2)| > 0 \end{aligned} \tag{4.137}$$



d.h. wir finden einen Radius $R \geq 0$ mit

$$\begin{aligned} T_f(x) &= f(x) \quad \forall\, |x - x_0| < R \\ T_{f,n}(x) &\not\to f(x) \quad \forall\, |x - x_0| > R \end{aligned} \tag{4.138}$$

6. Sei f in x_1 singulär (Pol,...), dann gilt $R \leq |x_0 - x_1|$.

Beispiele:

1. $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \qquad \text{(s.o.)} \tag{4.139}$$

Für $|x| > 1$ divergiert die Reihe (Summanden wachsen an).

2. $f(x) = \mathrm{e}^x \Rightarrow f^{(\nu)}(x) = \mathrm{e}^x$

$$T_f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}\, x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} \tag{4.140}$$

$|x| < K \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \right| = \left| \mathrm{e}^\xi \frac{x \cdot x \cdots\; x}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)} \right| \\ &\underset{K<N\leq n}{\leq} \mathrm{e}^K \left| \frac{x \cdot x \quad \cdots \quad x}{1 \cdot 2 \cdots (N-1)}\; \frac{x \;\cdot\; x \quad \cdots \quad x}{N \cdot (N+1) \cdots (n+1)} \right| \\ &\leq \underbrace{\mathrm{e}^K \left| \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} \right|}_{\text{hängt nicht von } n \text{ ab}} \quad \underbrace{\left(\frac{K}{N} \right)^{n-N+2}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ da } K/N < 1} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned} \tag{4.141}$$

Also

$$\mathrm{e}^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.142}$$

3. $f(x) = \log(1+x)$, $|x| < 1$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-x)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu x^\nu \tag{4.143}$$

Da $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + c$ gliedweise differenziert $f'(x)$ ergibt, vermuten wir

$$\log(1+x) = c - \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^\nu}{\nu}\,, \tag{4.144}$$

und folgern aus $f(0) = \log 1 = 0$, dass $c = 0$.
Bemerkung: Falls Reihe hübsch, dürfen wir gliedweise differenzieren (und integrieren); eigentlich brauchen wir dafür gleichmäßige Konvergenz (machen wir aber nicht). Für Taylorreihen und x innerhalb des Konvergenzradius' geht alles gut.

4. **Binomische Reihe:** $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f^{(\nu)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\nu+1)\,(1+x)^{\alpha-\nu} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} = \binom{\alpha}{\nu} \tag{4.145}$$

also

$$(1+x)^\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu \quad \forall\ |x| < 1 \tag{4.146}$$

Konvergenzradius ohne Beweis
Spezialfälle:
- $\alpha = n \in \mathbb{N}$: binomischer Satz (sogar für alle $x \in \mathbb{R}$)
- $\alpha = -1$: geometrische Reihe,

$$\binom{-1}{\nu} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-1-\nu+1)}{\nu!} = (-1)^\nu \tag{4.147}$$

- $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{1/2}{\nu} x^\nu\,, \quad |x| < 1 \tag{4.148}$$

5. $\sin^{(2\nu)}(x) = (-1)^\nu \sin x$, $\quad \sin^{(2\nu+1)}(x) = (-1)^\nu \cos x$, $\quad$ also

$$\sin x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} x^{2\nu+1} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R} \tag{4.149}$$

analog:
$\cos^{(2\nu)}(x) = (-1)^\nu \cos x$, $\quad \cos^{(2\nu+1)}(x) = (-1)^{\nu+1} \sin x$, also

$$\cos x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} x^{2\nu} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R} \tag{4.150}$$

6.
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu x^{2\nu}\,, \qquad |x| < 1 \tag{4.151}$$

folgere
$$\arctan x = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \, \frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1} + c \tag{4.152}$$

mit $c = 0$ da $\arctan 0 = 0$.

7.
$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} \, x^{2\nu+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} \, x^{2\nu} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \tag{4.153}$$

8. **Anwendung: Grenzwerte berechnen**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin^4 x}{(\cos x - 1)^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 (x + o(x))^4}{(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 (x^4 + o(x^4))}{-\frac{x^6}{8} + o(x^6)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^6 + o(x^6)}{-\frac{x^6}{8} + o(x^6)} = -8\end{aligned} \tag{4.154}$$

... besser als sechsmal l'Hospital!

9. $\frac{1}{1-x}$ um $x_0 = 3$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \frac{1}{1 - \big((x-3)+3\big)} = \frac{1}{-2-(x-3)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-3}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-3}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \, (x-3)^n\end{aligned} \tag{4.155}$$

für $\left|\frac{x-3}{2}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x-3| < 2$

10.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^x}{1-x} &= \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}\right) \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} x^\mu\right)\,, \qquad \text{für } |x| < 1 \text{ (wg. geom. Reihe)} \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \big(1 + x + x^2 + o(x^2)\big) \\ &= 1 + 2x + \frac{5}{2} x^2 + o(x^2)\,, \quad x \to 0\end{aligned} \tag{4.156}$$

allgemein **(Cauchy-Produkt)**:

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, x^\nu\right)\left(\sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu\, x^\mu\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\nu\, b_\mu\, x^{\nu+\mu} \qquad \left| \begin{array}{l} n := \nu+\mu \\ n\colon\ 0\ldots\infty \\ \nu\colon\ 0\ldots n \\ \mu = n-\nu \end{array}\right. \tag{4.157}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, b_{n-\nu}\, x^n$$

Erlaubt, falls alles hübsch (beide Reihen absolut konvergent, d.h. z.B. $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu x^\nu| < \infty$). Damit nochmal

$$\frac{\mathrm{e}^x}{1-x} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}\right)\left(\sum_{\mu=0}^{\infty} x^\mu\right), \qquad |x|<1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!}\, x^n \tag{4.158}$$

$$= \frac{1}{0!} + \left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}\right)x + \left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)x^2 + o(x^2)$$

11. **Weitere Anwendung: Lokale Extrema**

Definition: x_0 heißt lokale Maximal- bzw. Minimalstelle von f, wenn gilt:

$$f(x) < f(x_0) \text{ bzw. } f(x) > f(x_0) \quad \forall\, x \neq x_0 \quad \text{in einer Umgebung von } x_0\,.$$

x_0 heißt Extremalstelle von f, falls x_0 lokale Maximal- oder Minimalstelle ist.

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diffbar. Es gilt
(i) x_0 ist Extremalstelle $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$. (notwendige Bedingung)
(ii) $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ $\Rightarrow$ x_0 ist lokale Maximalstelle
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ x_0 ist lokale Minimalstelle
(hinreichenden Bedingung)

Analog: Sei f $n$mal stetig diffbar, n gerade, mit

$$f^{(\nu)}(x_0) = 0\ \forall\, \nu = 1,\ldots,n-1 \text{ und } f^{(n)}(x_0) > 0 \text{ (bzw. } f^{(n)}(x_0) < 0\text{)},$$

so ist x_0 ist lokale Minimalstelle (bzw. Maximalstelle).

Warum? Taylor!

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}}_{=0} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\underbrace{(x-x_0)^n}_{>0} \tag{4.159}$$

ξ liegt zwischen x_0 und x, und
wenn $f^{(n)}(x_0) < 0$ dann ist auch $f^{(n)}(x) < 0\ \forall\, x$ in einer Umgebung von x_0,
d.h. das VZ von $f^{(n)}(\xi)$ wird durch das VZ von $f^{(n)}(x_0)$ festgelegt. □

Oft ist es allerdings besser, gleich die Taylor-Reihe der fraglichen Funktion zu betrachten, vgl. erstes Beispiel im nächsten Abschnitt...

4.12 Kurvendiskussion

- Definitionsbereich
- Verhalten am Rand des Definitionsbereichs
  (Asymptoten, Definitionslücken, stetige Fortsetzbarkeit, ...)
- Nullstellen
- Extrema
- Skizze

Beispiele:

1. $f(x) = \dfrac{1-x^4}{1+x^4}$ definiert $\forall\, x \in \mathbb{R}$

   Spiegelsymmetrie (Spiegelung an y-Achse), denn $f(-x) = f(x)$

   Verhalten am "Rand" des Definitionsbereichs: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -1$

   Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

   Extrempunkte:

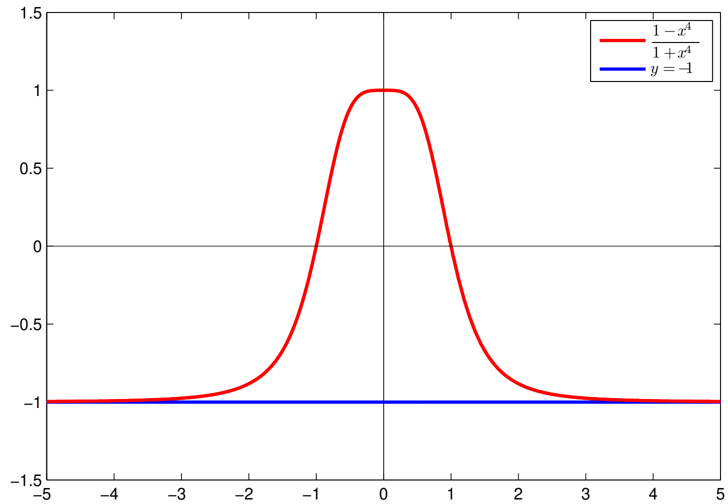
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-4x^3(1+x^4) - (1-x^4)4x^3}{(1+x^4)^2} \\ &= \frac{-8x^3}{(1+x^4)^2} \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \end{aligned} \tag{4.160}$$

   z.B. Taylorentwicklung:

$$f(x) \underset{\text{geom.R.}}{=} (1-x^4)\big(1 - x^4 + \underbrace{x^8 - x^{12} + \ldots}_{=o(x^4)}\big) = 1 - 2x^4 + o(x^4) \tag{4.161}$$

   also Hochpunkt $(0, 1)$.

   Skizze:



2. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$

   Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
   Zähler bei $x = -1$ auch Null:

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^3 \qquad\qquad +1\big) : \big(x+1\big) = x^2 - x + 1 \\ \underline{-x^3 - x^2} \\ \qquad -x^2 \\ \qquad \underline{x^2 + x} \\ \qquad\qquad x+1 \\ \qquad\qquad \underline{-x-1} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array} \tag{4.162}$$

   stetig fortsetzbar durch $f(-1) := -\frac{3}{2}$ und damit

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \tag{4.163}$$

   Pol (erster Ordung, also mit Vorzeichenwechsel) bei $x = 1$,
   d.h. $f(x) \sim \frac{1}{x-1} \to \pm\infty$ für $x \to 1\pm$

   Verhalten für große $|x|$:
   entweder durch Polynomdivision...

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^2 - x + 1\big) : \big(x-1\big) = x + \dfrac{1}{x-1} \\ \underline{-x^2 + x} \end{array} \tag{4.164}$$

...oder durch Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \\ &\underset{|x|>1}{=} \left(x-1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\dots\right) \\ &= x+(1-1)+\frac{1-1+1}{x}+\dots \\ &= x+\frac{1}{x}+\dots \end{aligned} \tag{4.165}$$

also $f(x) \sim x \to \pm\infty$ für $x \to \pm\infty$

Nullstellen:

$$f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2} \notin \mathbb{R} \tag{4.166}$$

keine (in $\mathbb{R}$)

Ableitung:

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-3x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \tag{4.167}$$

Extrema: $f'=0 \;\Leftrightarrow\; x=0$ oder $x=2$
Lokales Maximum $f(0)=-1$, lokales Minimum $f(2)=3$

Warum (Min/Max)? 4 Möglichkeiten:

(i) wegen Stetigkeit, Pol und Asymptotik

(ii) Untersuche VZ von $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$:
bei 0: $+ \to -$ also Hochpunkt
bei 2: $- \to +$ also Tiefpunkte

(iii) Untersuche f'':

$$\begin{aligned} f''(0)<0 \quad &\Rightarrow \quad \text{Hochpunkt} \\ f''(2)>0 \quad &\Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt} \end{aligned} \tag{4.168}$$

Vorsicht: Hinreichend, nicht notwendig – falls $f''=0$ folgt gar nichts!

(iv) Taylorentwicklung

um Null:

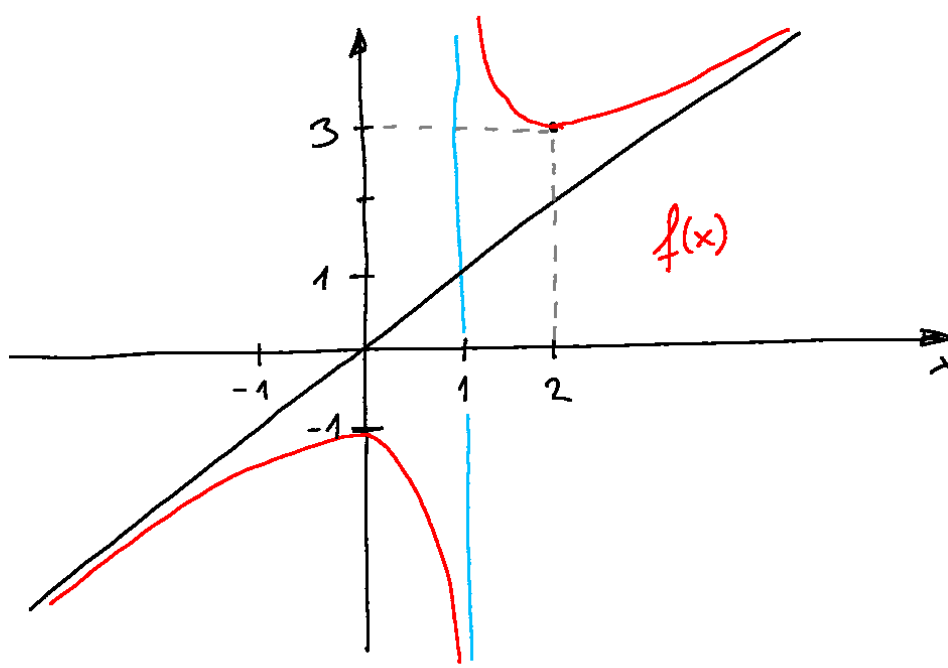
$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2-x+1}{x-1} = \frac{-1+x-x^2}{1-x} \\
&= \left(-1+x-x^2\right)\left(1+x+x^2+x^3+\ldots\right) \\
&= -1+(-x+x)+(-x^2+x^2-x^2)+\ldots \\
&= -1-x^2+\ldots
\end{aligned}
\tag{4.169}
$$

also Hochpunkt $(0,-1)$

um 2:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2-x+1}{x-1} \\
&= \frac{(x-2)^2+4x-4+x+1}{x-2+1} \\
&= \frac{(x-2)^2+3(x-2)+3}{1+(x-2)} \\
&= \left(3+3(x-2)+(x-2)^2\right)\left(1-(x-2)+(x-2)^2-(x-2)^3+\ldots\right) \\
&= 3+(3-3)(x-2)+(3-3+1)(x-2)^2+\ldots \\
&= 3+(x-2)^2+\ldots
\end{aligned}
\tag{4.170}
$$

also Tiefpunkt $(2,3)$.
Skizze:



3. $f : x \mapsto \sqrt{x - \dfrac{1}{x}}$

Definitionsbereich: $x \neq 0$ und $x - \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{x}$
(i) für $x > 0$: $x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$
(ii) für $x < 0$: $x^2 \leq 1 \Rightarrow x \geq -1$
also: Definitionsbereich $[-1, 0) \cup [1, \infty)$

Verhalten am Rand des Definitionsbereichs / Nullstellen:
$f(-1) = 0$
$f(x) \sim \sqrt{-\frac{1}{x}} \to \infty$ für $x \to 0-$
$f(1) = 0$
$f(x) \sim \sqrt{x} \to \infty$ für $x \to \infty$

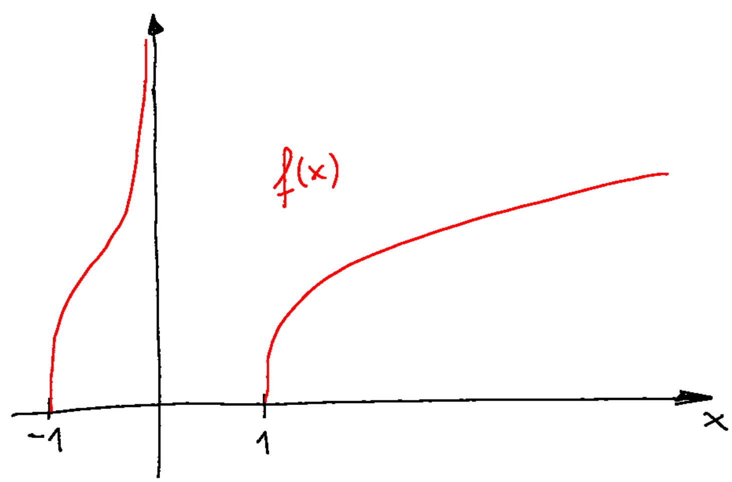
Ableitung:

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{2\sqrt{x - \frac{1}{x}}} > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{D} \tag{4.171}$$

...am Rand des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x \to -1+} f'(x) = \infty\,, \qquad \lim_{x \to 1+} f'(x) = \infty\,. \tag{4.172}$$

Skizze:



5 Vektorrechnung

5.1 Vektorräume

im WS 19/20 ohne Gruppen und Körper – Vektorräume immer über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

Definition: (Gruppe)
Sei $G \neq \emptyset$ eine Menge und $\circ$ eine Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$.
$(G, \circ)$ heißt Gruppe falls gilt:
(G1) aus $a, b \in G \Rightarrow a \circ b \in G$ (Abgeschlossenheit)
(folgt eigentlich bereits aus $\circ : G \times G \to G$, ist aber gut, das explizit festzuhalten)
(G2) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \ \forall \ a, b, c \in G$ (Assoziativität)
(G3) $\exists \ e \in G$ mit $a \circ e = a = e \circ a \ \forall \ a \in G$ (neutrales Element)
(G4) für jedes $a \in G \ \exists \ a^{-1} \in G$ mit $a \circ a^{-1} = e = a^{-1} \circ a$ (inverses Element)
(wobei e das neutrale Element aus (G3) ist)

Definition: (abelsche Gruppe)
Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt kommutativ oder abelsch falls zusätzlich gilt:
(G5) $a \circ b = b \circ a \ \forall \ a, b \in G$ (Kommutativität)

Eigenschaften: (von Gruppen)

1. Das neutrale Element e ist eindeutig bestimmt.
   Beweis: Annahme $\exists \ \tilde{e} \neq e$ mit $\forall \ a \in G$:
$$\begin{aligned} & & \tilde{e} \circ a &= a & &| \circ a^{-1} \quad \text{von rechts} \\ &\Leftrightarrow & (\tilde{e} \circ a) \circ a^{-1} &= a \circ a^{-1} & & \\ &\underset{(G2)}{\Leftrightarrow} & \tilde{e} \circ (a \circ a^{-1}) &= a \circ a^{-1} & & \\ &\underset{(G4)}{\Leftrightarrow} & \tilde{e} \circ e &= e & & \\ &\underset{(G3)}{\Leftrightarrow} & \tilde{e} &= e & &\text{Widerspruch} \end{aligned} \tag{5.1}$$

2. Zu jedem $a \in G$ ist das inverse Element eindeutig bestimmt.
   Beweis: Annahme $\exists \ b \neq a^{-1}$ mit
$$\begin{aligned} & & b \circ a &= e & &| \circ a^{-1} \quad \text{von rechts} \\ &\Leftrightarrow & (b \circ a) \circ a^{-1} &= e \circ a^{-1} & & \\ &\underset{(G2)}{\Leftrightarrow} & b \circ (a \circ a^{-1}) &= e \circ a^{-1} & & \\ &\underset{(G4)}{\Leftrightarrow} & b \circ e &= e \circ a^{-1} & & \\ &\underset{(G3)}{\Leftrightarrow} & b &= a^{-1} & &\text{Widerspruch} \end{aligned} \tag{5.2}$$

3. Gleichungen lassen sich eindeutig lösen:
   $\forall \ a, b \in G \ \exists \ x, y \in G$, so dass $a \circ x = b$ und $y \circ a = b$.
   Beweis: $x = a^{-1} \circ b$ und $y = b \circ a^{-1}$ tun's – Eindeutigkeit?
   Annahme: $\exists \ z \neq y$ mit

$$
\begin{aligned}
& z \circ a = b && \mid \circ\, a^{-1} \quad \text{von rechts} \\
\Leftrightarrow \quad & z \circ a \circ a^{-1} = b \circ a^{-1} && \\
\Leftrightarrow \quad & z = b \circ a^{-1} = y && \text{Widerspruch}
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

Bemerkung: für nicht-abelsche Gruppen gilt i.A. $x \neq y$.

Beispiele

1. $(\mathbb{Z}, +)$: $e = 0$, $a^{-1} = -a$ für $a \in \mathbb{Z}$
   natürlich ebenso $(\mathbb{R}, +)$ aber nicht $(\mathbb{N}, +)$!
2. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$: $e = 1$, für $\mathbb{Q} \ni x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ (vollständig gekürzt) ist $x^{-1} = \frac{q}{p}$
   ebenso $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ aber nicht $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$!
3. (Menge aller Polynome vom Grad $\leq n$, $+$)
4. G: Menge aller Symmetrieoperationen (Drehungen, Spiegelungen etc.), die ein bestimmtes Objekt (Atom, Molekül, ...) invariant lassen.
   $\circ$: Nacheinanderausführen der Operationen.
   Beispiel: Rechteck $\rightsquigarrow$ Gruppe mit 4 Elementen
5. Gruppe mit zwei Elementen, z.B. $(\mathbb{Z}_2, +)$
6. triviale Gruppe

Definition: (Körper)
Sei $K \neq \emptyset$ eine Menge mit zwei Verknüpfungen, $+ : K \times K \to K$ und $\cdot : K \times K \to K$.
$(K, +, \cdot)$ heißt Körper, falls gilt:
(K1) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0.
(K2) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist ebenfalls eine abelsche Gruppe.
(K3) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \;\forall\; a, b, c \in K$ (Distributivität)

Bemerkungen:

1. Nenne das zu $a \in K$ additiv inverse Element $(-a)$.
2. Jeder Körper hat mindestens zwei Elemente, nämlich $0 \in K$ und, da $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ Gruppe ist, $\exists\; e \in K$, $e \neq 0$ (multiplikativ neutrales Element).
3. Multiplikation mit 0: $a \in K \setminus \{0\}$

   $$0 = e + (-e) \qquad \mid \cdot\, a \tag{5.4}$$
   $$0 \cdot a = (e + (-e)) \cdot a \underset{\text{(K3)}}{=} a + (-e) \cdot a =: \tilde{a} \in K \tag{5.5}$$

   Annahme: $\tilde{a} \in K \setminus \{0\} \Rightarrow \tilde{a} \cdot a^{-1} = e + (-e) = 0 \notin K \setminus \{0\}$ – Widerspruch!
   $\Rightarrow \tilde{a} = 0$ also $0 \cdot a = 0$.
   außerdem folgt wegen $a + (-e) \cdot a = 0$, dass $(-a) = (-e) \cdot a$.
4. Üblicherweise nennen wir $e = 1$ (multiplikativ neutrales Element).
5. aus $a \cdot b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$ oder $b = 0$, denn
   anderfalls $a, b \in K \setminus \{0\} \Rightarrow a \cdot b \in K \setminus \{0\}$ da Gruppe – Widerspruch!

Beispiele

1. $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, oder auch: $(\mathbb{C},+,\cdot)$
2. $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ mit $(+,\cdot)$ modulo 2, d.h.

$$0+0=0\,,\qquad 1+0=1\,,\qquad 1+1=0 \tag{5.6}$$
$$0\cdot 0=0\,,\qquad 0\cdot 1=0\,,\qquad 1\cdot 1=1 \tag{5.7}$$

   $\Rightarrow (-1) = 1$ und $1^{-1} = 1$

3. $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ mit $(+,\cdot)$ modulo 3, d.h.

$$\begin{array}{c|ccc} + & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|ccc} \cdot & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array} \tag{5.8}$$

   $\Rightarrow (-1) = 2$, $(-2) = 1$ (additiv Inverse)
   und $1^{-1} = 1$, $2^{-1} = 2$ (multiplikativ Inverse)
   Bemerkungen:
   • abelsche Gruppen $\Rightarrow$ Tabellen symmetrisch bzgl. Spiegelung an der Diagonalen $\setminus$
   • Gruppen $\Rightarrow$ Gleichungen eindeutig lösbar
   $\Rightarrow$ jedes Element tritt in jeder Zeile und Spalte genau einmal auf!
   (In $\cdot$-Tabelle natürlich der Block ohne Nullen, da nur $(K\setminus\{0\},\cdot)$ Gruppe ist!)

4. $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ mit $(+,\cdot)$ modulo 4 ist **kein** Körper, denn
   $2\cdot 2 = 0 \notin \mathbb{Z}_4\setminus\{0\}$ – Widerspruch zu $(\mathbb{Z}_4\setminus\{0\},\cdot)$ Gruppe

im WS 19/20 ohne Gruppen und Körper – Vektorräume immer über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

Definition: (Vektorraum)
Sei $(V,+)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $\vec{0}$,
K ein Körper und $\cdot : K\times V \to V$ (skalare Multiplikation).
V heißt Vektorraum über K falls zusätzlich gilt:
(V1) $\lambda\cdot\vec{a}\in V \quad \forall\,\lambda\in K$ und $\forall\,\vec{a}\in V$ (Abgeschlossenheit)
(V2) $\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$
$(\lambda+\mu)\cdot\vec{a} = \lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{a}$
$\forall\,\lambda,\mu\in K$ und $\forall\,\vec{a},\vec{b}\in V$ (Distributivgesetze)
(V3) $1\cdot\vec{a} = \vec{a} \quad \forall\,\vec{a}\in V$
(V4) $\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{a}) = (\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{a} \quad \forall\,\lambda,\mu\in K$ und $\forall\,\vec{a}\in V$ (Assoziativgesetz)

Bemerkung

1. Multiplikationspunkte dürfen wie üblich weggelassen werden.
2. Aus (G1) für $(V,+)$ und (V1) $\quad\Rightarrow\quad \lambda\vec{a}+\mu\vec{b}\in V\ \forall\,\lambda,\mu\in K$ und $\forall\,\vec{a},\vec{b}\in V$

Beispiele

1. $\mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$

2. Ebene $\mathbb{R}^2$, Raum $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$
   allgemein $\mathbb{R}^n$ mit komponentenweiser Vektor-Addition und skalarer Multiplikation

$$\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n: \qquad \vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}, \qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix} \tag{5.9}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}, \qquad \lambda\vec{a}=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\\lambda a_2\\\vdots\\\lambda a_n\end{pmatrix} \tag{5.10}$$

3. Polynome (beliebigen Grads) über $\mathbb{R}$

$$P(x)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu\,, \qquad Q(x)=\sum_{\nu=0}^{m} b_\nu x^\nu\,, \qquad a_\nu, b_\nu, x\in\mathbb{R} \tag{5.11}$$

$$(\lambda P)(x)=\lambda P(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\lambda a_\nu x^\nu\,, \qquad (P{+}Q)(x)=P(x){+}Q(x)=\sum_{\nu=0}^{\max\{n,m\}}(a_\nu{+}b_\nu)x^\nu\,, \tag{5.12}$$

   (wobei $a_\nu=0\;\forall\,\nu>n$ und $b_\nu=0\;\forall\,\nu>m$)
   übrigens ∞-dimensional (später)

5.2 Lineare Unabhängigkeit

Definitionen:

1. $\vec{0}$ ist linear abhängig (l.a.)
   $\vec{a}\neq\vec{0}$ ist linear unabhängig (l.u)

2. Zwei Vektoren $\vec{a},\vec{b}$ heißen l.u. $\quad\Leftrightarrow\quad$ aus $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}$ folgt $\lambda=\mu=0$
   d.h. der Nullvektor $\vec{0}$ lässt sich nur als triviale Linearkombination von $\vec{a}$ & $\vec{b}$ schreiben
   anderfalls heißen sie l.a.

   $\vec{a},\vec{b}$ l.a. $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\parallel\vec{b}$ (oder mindestens einer ist Nullvektor)

   $\vec{a},\vec{b}$ l.u. $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\vec{a},\vec{b}$ spannen die Ebene $\left\{\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}\,|\,\lambda,\mu\in K\right\}$ auf.

3. $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ heißen l.u. $\quad\Leftrightarrow\quad$ aus $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\vec{a}_j=\vec{0}$ folgt $\lambda_j=0\;\forall\,j=1,\ldots,n$

Bemerkungen:

1. Sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ l.u., so ist Koeffizientenvergleich möglich, d.h.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{a}_j = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \vec{a}_j \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_j = \mu_j \quad \forall\, j = 1, \ldots, n \tag{5.13}$$

2. Sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ l.u. so spannen sie den gesamten $\mathbb{R}^n$ auf, d.h. für jeden Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten λ_j, so dass

$$\vec{b} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{a}_j \tag{5.14}$$

   Bestimmung der λ_j durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.

Beispiel:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

Fragen:

1. Sind die Vektoren l.u.?
2. Können wir z.B. $\vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ als Linearkombination (LK) der $\vec{a}_j$ darstellen?

Zu 2:
Suche λ_j mit

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

d.h. löse das lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 1 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 2 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 3 \end{array} \tag{5.17}$$

Umformen: erlaubte Operationen

- Zeilen vertauschen
- Zeile mit Faktor $\neq 0$ multiplizieren
- Vielfache einer Zeile zu einer anderen addieren
- **Vorsicht:** Zu einer Zeile, die wir zu einer anderen Zeile addieren, im gleichen Schritt nicht auch etwas hinzuaddieren!

Gauß-Algorithmus:

- Ziel 1: Zeilenstufenform (durch Vorwärtselimination)
- Rückwärtselimination

kompakte Schreibweise

$$\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&1&1&2\\1&0&1&3\end{array}\right)\begin{array}{l}{}^{-1}\\ \\ {}_{+}\end{array}\\
\hline
\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&1&1&2\\0&-1&1&2\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ {}_{+}\end{array}\\
\hline
\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&1&1&2\\0&0&2&4\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \mid\cdot 1/2\end{array}\qquad(*)\\
\hline
\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&1&1&2\\0&0&1&2\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ {}^{+}\\ {}_{-1}\end{array}\\
\hline
\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&2\end{array}\right)\begin{array}{l}{}^{+}\\ {}_{-1}\\ \end{array}\\
\hline
\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&2\end{array}\right)
\end{array}\tag{5.18}$$

Die Lösung steht in der letzten Spalte:

$$\lambda_1 = 1\,,\quad \lambda_2 = 0\,,\quad \lambda_3 = 2\,. \tag{5.19}$$

Alternativ können wir auch in $(*)$ – Zeilenstufenform – ablesen

$$\begin{aligned}
2\lambda_3 &= 4 &&\Rightarrow && \lambda_3 = 2\\
\lambda_2 + \lambda_3 &= 2 &&\Rightarrow && \lambda_2 = 2 - \lambda_3 = 0\\
\lambda_1 + \lambda_2 &= 1 &&\Rightarrow && \lambda_1 = 1 - \lambda_2 = 1
\end{aligned}\tag{5.20}$$

Zu 1: Die drei Vektoren sind l.u.
Dazu lösen wir das LGS $\left(\cdots|\vec{0}\right)$ und prüfen, ob es nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ hat. (Sehen wir auch bereits in $(*)$. – Wäre unterwegs eine Zeile mit ausschließlich Nullen links von $|$ aufgetreten, so wären die Vektoren l.a.)

Neues Beispiel dazu: $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ wie oben,

$$\vec{a}_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\,, \tag{5.21}$$

also

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \\
\hline
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \\
\hline
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
\hline
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
\end{array}
\tag{5.22}
$$

d.h.

$$\lambda_3 = t\,, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -t \tag{5.23}$$

löst $\forall t \in \mathbb{R}$, d.h. die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ sind l.a.

Lässt sich $\vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ als LK darstellen? Nein, denn...

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \\
\hline
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \\
\hline
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)
\end{array}
\tag{5.24}
$$

...letzte Zeile bedeutet

$$0 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 = 4 \qquad \text{Widerspruch!} \tag{5.25}$$

Vorsicht: Keine "Ringoperationen" machen!

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \\
\hline
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \\
\hline
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \\
\hline
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
\end{array}
\tag{5.26}
$$

oben: eindeutige Lösung $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.
unten: wähle $x_3 = t \in \mathbb{R}$ beliebig, $x_2 = 5 - t$, $x_1 = t - 2$, d.h. die allgemeine Lösung wäre

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t \qquad \text{– zu viel!!!} \tag{5.27}$$

Erster Schritt war verboten!

inkl. Beispiele in $V = C(\mathbb{R})$: (i) $\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^x, \sinh(x)$ l.a., (ii) $1, \mathrm{e}^x, \mathrm{e}^x$ l.u.

5.3 Lineare Gleichungssysteme und allgemeiner Gauß-Algorithmus

Allgemein: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{a}_j = \vec{b} \tag{5.28}$$

heißt lineares Gleichungssystem (LGS) – m Gleichungen für n Unbekannte.
$\vec{b} = 0$: homogenes LGS
$\vec{b} \neq 0$: inhomogenes LGS

Andere Schreibweise für LGS:

$$L(\vec{x}) = \vec{b}\,, \tag{5.29}$$

wobei

$$\begin{aligned} L: \qquad \mathbb{R}^n \qquad &\to \qquad \mathbb{R}^m \\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad &\mapsto \quad L(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{a}_j \end{aligned} \tag{5.30}$$

eine **lineare** Abbildung ist, denn offensichtlich gilt

$$L(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda L(\vec{x}) + \mu L(\vec{y})\,. \tag{5.31}$$

Die Mengen (für $\vec{b} \neq \vec{0}$)

$$\mathcal{L}_{\vec{b}} := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, L(\vec{x}) = \vec{b} \right\} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{L}_0 := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, L(\vec{x}) = \vec{0} \right\} \tag{5.32}$$

heißen Lösungsmenge des inhomogenen bzw. des homogenen LGS.

Übrigens: Wir nennen $\mathcal{L}_0$ auch $\ker L$, den *Kern von* L.

Satz 10. *Sei $\vec{b} \neq \vec{0}$, seien $\vec{x}_1^h, \vec{x}_2^h \in \mathcal{L}_0$ und $\vec{y}^p \in \mathcal{L}_{\vec{b}}$, dann gilt:*
(i) $\lambda\vec{x}_1^h + \mu\vec{x}_2^h \in \mathcal{L}_0 \;\forall\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
(ii) $\vec{y} \in \mathcal{L}_{\vec{b}} \quad\Leftrightarrow\quad \exists\; \vec{x} \in \mathcal{L}_0$ *mit* $\vec{y} = \vec{y}^p + \vec{x}$.

Beweis:
(i) $L(\lambda\vec{x}_1^h + \mu\vec{x}_2^h) = \lambda L(\vec{x}_1^h) + \mu L(\vec{x}_2^h) = \vec{0} + \vec{0}$
(ii) "$\Leftarrow$": $L(\vec{y}) = L(\vec{y}^p + \vec{x}) = L(\vec{y}^p) + L(\vec{x}) = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$
"$\Rightarrow$": $\vec{x} := \vec{y} - \vec{y}^p$, $L(\vec{x}) = L(\vec{y}) - L(\vec{y}^p) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$ □

Bemerkung: Gilt auch alles für $L : V \to W$ linear, mit beliebigen Vektorräumen V und W (über demselben Körper), denn $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$ wurde nicht benötigt.

Zur Lösung: Bringe

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n & \vec{b} \end{array} \right) \tag{5.33}$$

auf Zeilenstufenform (ZSF)

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} \blacksquare & * & * & * & \cdots & & * & \cdots & * & \tilde{b}_1 \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & \cdots & & * & \cdots & * & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & \cdots & * & \cdots & * & \tilde{b}_3 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & 0 & \blacksquare & * & \cdots & * & \tilde{b}_r \\ 0 & & & & & & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ 0 & & & & & & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & & & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_m \end{array} \right) \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} r \text{ Zeilen} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} m-r \text{ Zeilen} \end{array} \tag{5.34}$$

Kennzeichen der ZSF:

1. $\blacksquare$ sind Zahlen $\neq 0$.
2. $*$ sind irgendwelche Zahlen.
3. Links (und unterhalb) von $\blacksquare$ stehen nur Nullen.
4. Stufen von $\blacksquare$ zu $\blacksquare$: eine Zeile nach unten, mindestens eine Spalte nach rechts.

Lösung des LGS:

1. Zeile der Form $(0 \cdots 0|\tilde{b}_j)$ mit $\tilde{b}_j \neq 0$ bedeutet: LGS hat keine Lösung.
2. Spalten ohne $\blacksquare$ entsprechen frei wählbaren Variablen (parametrisiere so die Lösung).
3. Variablen, die Spalten mit $\blacksquare$ entsprechen, sind durch die Zeile, in der $\blacksquare$ steht, festgelegt (von unten nach oben arbeiten).

Insbesondere hat das LGS mit ZSF

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & & * & \tilde{b}_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \blacksquare & \tilde{b}_m \end{array} \right) \tag{5.35}$$

(mit $n = m$) eine eindeutige Lösung.

Beispiele:

1.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \tag{5.36}$$
hat keine Lösung.

2.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{5.37}$$
$x_3 = 2$, $x_2 = t \in \mathbb{R}$ beliebig, $x_1 = 1 - x_3 - 2t = -1 - 2t$, bzw.
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.38}$$

3.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right), \tag{5.39}$$
$x_3 = 0$, $x_2 = 4 - 2x_3 = 4$, $x_1 = 1 - 2x_2 - x_3 = -7$ (eindeutig).

5.4 Unterräume, Dimension und Basis

Definition: (Dimension)
Sei V ein Vektorraum. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in V heißt Dimension von V, $\dim V$.

Bemerkung: $\dim \mathbb{R}^n = n$
Beweis: Die kanonischen Einheitsvektoren
$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.40}$$
sind linear unabhängig $\Rightarrow \dim \mathbb{R}^n \geq n$.
Seinen $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_{n+1} \in \mathbb{R}^n$. Bringe das LGS
$$\left(\begin{array}{cccc|c} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_{n+1} & \vec{0} \end{array}\right) \tag{5.41}$$
auf Zeilenstufenform. Diese enthält höchstens n $\blacksquare$, da das LGS n Zeilen hat.
$\Rightarrow$ Mindestens eine Variable bleibt frei wählbar.

$\Rightarrow$ Es gibt nichttriviale Lösungen, d.h. die Vektoren sind l.a.
Also ist $\dim \mathbb{R}^n < n+1$ und damit $= n$. $\square$

Definition: (Unterraum)
Sei V Vektorraum über K. U heißt Unterraum von V, falls gilt:
(i) $U \subseteq V$
(ii) U ist ein Vektorraum (über K).

Bemerkung:

1. Zu gegebenem $U \subseteq V$ ist lediglich zu prüfen, ob aus $\vec{a}, \vec{b} \in U$, $\lambda \in K$, folgt, dass auch $\vec{a} + \vec{b}$ und $\lambda\vec{a} \in U$ sind. (Rechenregeln erbt U von V.)
2. $\dim U \leq \dim V$

Beispiele:

1. $U = \{\vec{0}\}$ ist Unterraum, $\dim U = 0$.
2. Die Lösungsmenge $\mathcal{L}_0$ eines homogenen LGS, $L(\vec{x}) = \vec{0}$, $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ist Unterraum des $\mathbb{R}^n$, denn offensichtlich
$$\mathcal{L}_0 = \ker L = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, L(\vec{x}) = \vec{0} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n \,, \tag{5.42}$$
und Abgeschlossenheit folgt aus Satz 10 (i).
$\dim \mathcal{L}_0 =$ Anzahl der Spalten ohne $\blacksquare$ in ZSF.

Definitionen: (Lineare Hülle, Erzeugendensystem, Basis)
Sei V ein Vekorraum über K und $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in V$.

1. Die Menge aller Linearkombinationen,
$$\operatorname{span}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) := \left\{ \vec{x} \in V \,\middle|\, \vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{a}_j \,,\ \lambda_j \in K \right\} , \tag{5.43}$$
heißt lineare Hülle (oder Aufspann) von $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.
2. Die Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ heißen Erzeugendensystem von V, falls gilt
$$\operatorname{span}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = V \,. \tag{5.44}$$
Wir sagen auch, sie spannen V auf.
3. Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ l.u. und bilden ein Erzeugendensystem von V, so heißen sie Basis von V.

Bemerkungen:

1. $\operatorname{span}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ ist ein Unterraum von V.
2. Die Anzahl der Vektoren einer Basis von V ist gleich $\dim V$.

Beispiele:

1. Die Vektoren
$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \tag{5.45}$$
spannen den $\mathbb{R}^2$ auf, sind aber keine Basis, da $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$
2. Die kanonischen Einheitsvektoren $\vec{e}_j$ (s.o.), $j = 1, \ldots, n$, mit Komponenten $(\vec{e}_j)_k = \delta_{jk}$, wobei
$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{5.46}$$
das Kronecker-Symbol ist, bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$ (die kanonische Basis).
3. Die Vektoren
$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \tag{5.47}$$
bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.
4. $\{1\}$ ist eine Basis von $\mathbb{C}$ als VR über $\mathbb{C}$, d.h. $\dim \mathbb{C} = 1$.
5. $\{1, \mathrm{i}\}$ ist eine Basis von $\mathbb{C}$ als VR über $\mathbb{R}$, d.h. $\dim \mathbb{C} = 2$.

Satz 11.
Seien $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$. Die Dimension von $\mathrm{span}\,(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ *ist gleich der Anzahl der* ■ *in der Zeilenstufenform von*
$$\left(\begin{array}{cccc|c} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n & \vec{0} \end{array} \right). \tag{5.48}$$

Bemerkung: Damit gilt $\dim \mathcal{L}_0 + \dim \mathrm{span}\,(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = n$.
Es gilt außerdem $\mathrm{span}\,(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \mathrm{im}\, L$, wobei
$\mathrm{im}\, L := \{\vec{y} \in \mathbb{R}^m \,|\, \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } L(\vec{x}) = \vec{y}\}$ das Bild der linearen Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n x_j \vec{a}_j$, ist. Oben hatten wir bereits bemerkt, dass $\mathcal{L}_0 = \ker L$.
Analog gilt für eine beliebige lineare Abbildung $L : V \to W$
$\dim \ker L + \dim \mathrm{im}\, L = \dim V$.

Beweisskizze: maximale Anzahl ■: n

1. n ■ $\Rightarrow$ Vektoren l.u. $\Rightarrow \dim \mathrm{span}\,(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = n$
2. eine Spalte ohne ■ $\Rightarrow$ Vektoren l.a. $\Rightarrow \dim \mathrm{span}\,(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) < n$.
Lasse diese Spalte weg: restliche $n - 1$ Vektoren sind l.u.
$\Rightarrow \dim \mathrm{span}\,(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = n - 1$.
3. etc.

5.5 Skalarprodukt und Norm

Wdh: Länge/Betrag eines Vektors aus $\mathbb{R}^n$ und Skalarprodukt zweier Vektoren. Das motiviert die folgenden Definitionen...

Definition: (Norm)
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+$ heißt Norm,
wenn $\forall\, \vec{a}, \vec{b} \in V$ und $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
(N1) $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
(N2) $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda|\|\vec{a}\|$
(N3) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (Dreiecksungleichung)

Definition: (Skalarprodukt)
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt,
wenn $\forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ und $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
(S1) $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = \langle\vec{b}, \vec{a}\rangle$ (symmetrisch)[9]
(S2) $\langle\vec{a}, \lambda\vec{b}\rangle = \lambda\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$
$\langle\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\rangle = \langle\vec{a}, \vec{b}\rangle + \langle\vec{a}, \vec{c}\rangle$ (linear)
(S3) $\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle \geq 0$, wobei $\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a} = \vec{0}$ (positiv definit)

Satz 12. (Norm)
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Jedes Skalarprodukt, $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ induziert eine Norm, $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+$, gegeben durch

$$\|\vec{a}\| := \sqrt{\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle}\,. \tag{5.49}$$

Beweis:
(N1) folgt aus (S3). Zu (N2):

$$\|\lambda\vec{a}\| = \sqrt{\langle\lambda\vec{a}, \lambda\vec{a}\rangle} \underset{(S2)}{=} \sqrt{\lambda\langle\lambda\vec{a}, \vec{a}\rangle} \underset{(S1)}{=} \sqrt{\lambda\langle\vec{a}, \lambda\vec{a}\rangle} \underset{(S2)}{=} \sqrt{\lambda^2\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle} = |\lambda|\|\vec{a}\| \tag{5.50}$$

Für (N3) beweisen wir zunächst:

Lemma 13. (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)
Skalarprodukt und Norm erfüllen

$$|\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle| \leq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \quad \forall\ \vec{a}, \vec{b} \in V\,. \tag{CS}$$

Beweis: Fall $\vec{b} = \vec{0}$ klar; also $\vec{b} \neq \vec{0}$:

$$0 \leq \langle\vec{a} - \lambda\vec{b}, \vec{a} - \lambda\vec{b}\rangle = \|\vec{a}\|^2 + \lambda^2\|\vec{b}\|^2 - 2\lambda\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle\,, \tag{5.51}$$

[9] Später werden wir auch Normen und Skalarprodukte für Vektorräume über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ betrachten; dann muss lediglich (S1) modifiziert werden.

wähle $\lambda = \dfrac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{\|\vec{b}\|^2}$,

$$\begin{aligned} & 0 \leq \|\vec{a}\|^2 + \frac{\left(\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\right)^2}{\|\vec{b}\|^2} - 2\frac{\left(\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\right)^2}{\|\vec{b}\|^2} = \|\vec{a}\|^2 - \frac{\left(\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\right)^2}{\|\vec{b}\|^2} \\ \Leftrightarrow \quad & \Big(\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\Big)^2 \leq \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 \end{aligned} \tag{5.52}$$

$\square$

Damit (N3):

$$\begin{aligned} \|\vec{a}+\vec{b}\|^2 &= \langle\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\rangle = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\langle\vec{a},\vec{b}\rangle \\ &\underset{\text{(CS)}}{\leq} \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| = \Big(\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|\Big)^2 \end{aligned} \tag{5.53}$$

$\square$

Beispiel: (kanonisches Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$)
Für $\vec{a},\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ definiert

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \tag{5.54}$$

ein Skalarprodukt. Wir schreiben

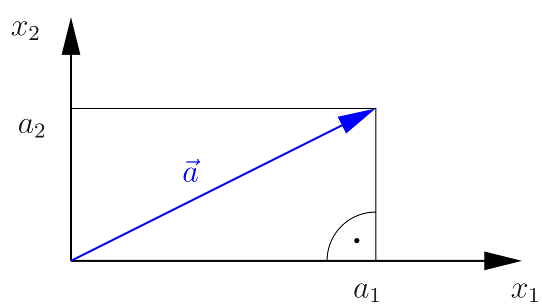
$$\vec{a}\cdot\vec{b} := \langle\vec{a},\vec{b}\rangle \tag{5.55}$$

(bzw. auch $\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b}$) und für die zugehörige Norm

$$|\vec{a}| := \|\vec{a}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} \tag{5.56}$$

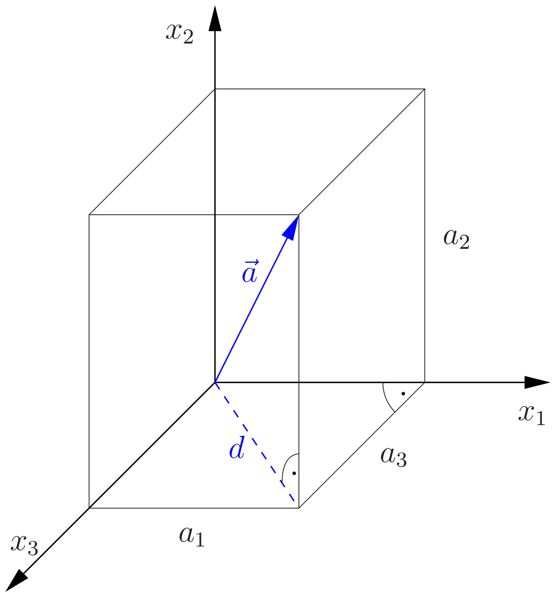
Interpretation:

1. Norm/Betrag: Länge des Vektors
   - $\mathbb{R}^2$ Pythagoras



$$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$$

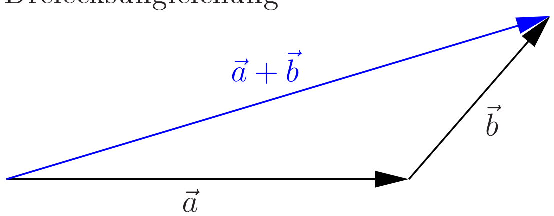
- $\mathbb{R}^3$ zweimal Pythagoras (Raumdiagonale)



$$\begin{aligned} d^2 &= a_1^2 + a_3^2 \\ |\vec{a}|^2 &= d^2 + a_2^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \end{aligned}$$

- $\mathbb{R}^n$ analog $(n-1)$-mal Pythagoras

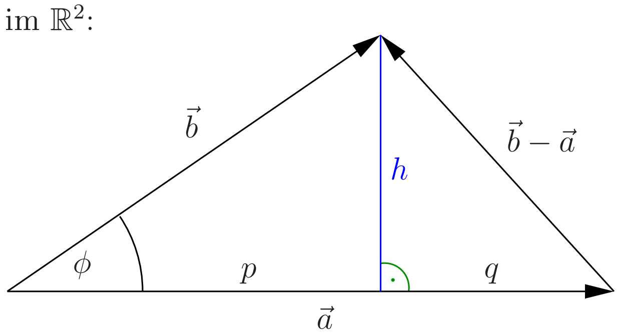
2. Dreiecksungleichung



$$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

3. Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$

- im $\mathbb{R}^2$:



$$|\vec{a}| = p + q$$

$$h^2 + q^2 = |\vec{b}-\vec{a}|^2 \tag{5.57}$$

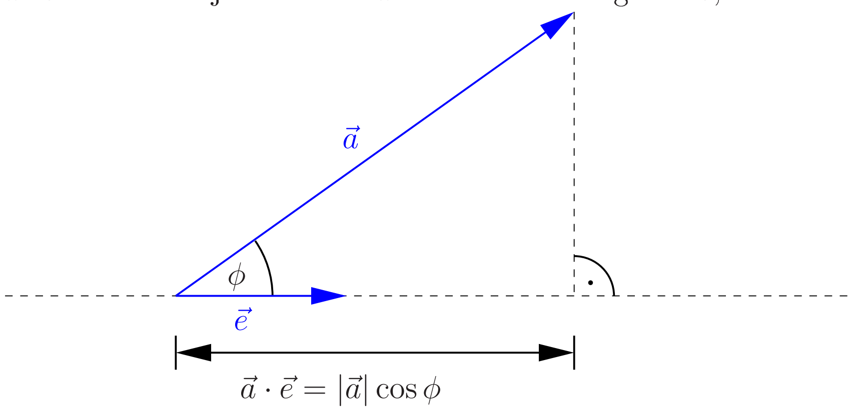
$$\Leftrightarrow \quad h^2 + (|\vec{a}| - p)^2 = (\vec{b}-\vec{a})^2 \tag{5.58}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{h^2} + \cancel{|\vec{a}|^2} + \cancel{p^2} - 2p|\vec{a}| = \cancel{|\vec{b}|^2} + \cancel{|\vec{a}|^2} - 2\vec{a}\vec{b} \qquad \big| \left(-\tfrac{1}{2}\right) \tag{5.59}$$

$$\underset{\cos\phi = p/|\vec{b}|}{\Leftrightarrow} \quad |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi = \vec{a}\vec{b} \tag{5.60}$$

- im $\mathbb{R}^n$: verlege Skizze in die Ebene, in der $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegen
- allgemein: (CS) stellt sicher, dass $\frac{|\langle\vec{a},\vec{b}\rangle|}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} \leq 1$, d.h. wir können immer $\arccos\left(\frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}\right)$ als Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ betrachten.

4. $\vec{e}$ heißt Einheitsvektor, falls $\|\vec{e}\| = 1$.
   $\vec{a}, \vec{e} \in \mathbb{R}^n$, $|\vec{e}| = 1$:
   $\vec{a} \cdot \vec{e}$ ist die Projektion von $\vec{a}$ auf die Richtung von $\vec{e}$, denn



   Allgemein für $\vec{a}, \vec{e} \in V$, $\|\vec{e}\| = 1$:
   Nenne $\langle\vec{a}, \vec{e}\rangle = \|\vec{a}\| \cos\phi$ die Projektion von $\vec{a}$ auf die Richtung von $\vec{e}$.

Definition: (Orthogonalität)
Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in V$ heißen orthogonal zueinander, falls $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = 0$.

Bemerkungen:

1. Für den Winkel zwischen den Vektoren gilt dann
   $\phi = \arccos\left(\frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \mathrel{\widehat{=}} 90°$.

2. Aus Orthogonalität folgt Lineare Unabhängigkeit (für Vektoren $\neq \vec{0}$)
   Seinen $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$, $\vec{a}_j \neq \vec{0}$, paarweise orthogonal, d.h. $\langle\vec{a}_j, \vec{a}_k\rangle = 0 \ \forall \ k \neq j$:

$$\vec{0} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{a}_j \tag{5.61}$$

$\Rightarrow$

$$0 = \left\langle \vec{a}_k \, , \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{a}_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{\langle\vec{a}_k, \vec{a}_j\rangle}_{=\delta_{jk}\|\vec{a}_k\|^2} = \lambda_k \underbrace{\|\vec{a}_k\|^2}_{>0} \tag{5.62}$$

$\Rightarrow \lambda_k = 0 \ \forall \ k = 1, \dots, n$, d.h. die Vektoren sind l.u. $\square$

Definition: (ON-Basis)
Eine Basis, deren Elemente paarweise orthogonal sind, heißt Orthogonal-Basis. Sind die Vektoren zusätzlich normiert, d.h. haben sie alle Norm 1, dann bilden sie eine Orthonormal-Basis (ONB).
Kurz: $\{\vec{a}_j\}_{j=1,\dots,\dim V}$ ONB $\quad\Leftrightarrow\quad \langle\vec{a}_j, \vec{a}_k\rangle = \delta_{jk} \ \forall \ j, k = 1, \dots, \dim V$

Beispiele: Betrachte $V = \mathbb{R}^2$ mit dem kanonischen Skalarprodukt:

1. $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine ONB,
2. $\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ auch.

Basis-Entwicklung eines Vektors:
gegeben: $\vec{a} \in V$ und ONB $\{\vec{c}_j\}$ von V
gesucht: $\vec{a}$ als LK der $\vec{c}_j$, d.h.

$$\vec{a} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{c}_j$$

Lösung: Bilde Skalarprodukt mit $\vec{c}_k$,

$$\langle \vec{c}_k, \vec{a} \rangle = \left\langle \vec{c}_k, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{c}_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{\langle \vec{c}_k, \vec{c}_j \rangle}_{=\delta_{jk}} = \lambda_k \,. \tag{5.63}$$

Beispiel: $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit Basen aus vorherigem Beispiel:

$$\begin{aligned} \vec{b} &= 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{b} &= \sqrt{2}\,\vec{a}_1 + 2\sqrt{2}\,\vec{a}_2 \end{aligned} \tag{5.64}$$

Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren:
gegeben: Basis $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ von V
gesucht: ON-Basis $\{\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n\}$ von V

$$\vec{c}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|} \tag{5.65}$$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \langle \vec{c}_1, \vec{a}_2 \rangle \vec{c}_1 \qquad \vec{c}_2 = \frac{\vec{b}_2}{\|\vec{b}_2\|} \tag{5.66}$$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \langle \vec{c}_1, \vec{a}_3 \rangle \vec{c}_1 - \langle \vec{c}_2, \vec{a}_3 \rangle \vec{c}_2 \qquad \vec{c}_3 = \frac{\vec{b}_3}{\|\vec{b}_3\|} \tag{5.67}$$

$$\vdots \tag{5.68}$$

$$\vec{b}_n = \vec{a}_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle \vec{c}_j, \vec{a}_n \rangle \vec{c}_j \qquad \vec{c}_n = \frac{\vec{b}_n}{\|\vec{b}_n\|} \tag{5.69}$$

Bemerkung: Sind die Start-Vektoren $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ l.a. so ergibt sich irgendwann der Nullvektor $\vec{0}$ (evt. mehrfach) – weglassen! $\Rightarrow$ Die $\vec{c}_j \neq \vec{0}$ bilden eine ONB von $\mathrm{span}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$.

Beispiel:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V = \text{ lineare Hülle der beiden} \tag{5.70}$$

ONB bezüglich kanonischem Skalarprodukt:

$$
\begin{aligned}
\vec{c}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \\
\vec{b}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \\
\vec{c}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
\tag{5.71}
$$

5.6 Kreuzprodukt und Spatprodukt im $\mathbb{R}^3$

Definition: (Kreuzprodukt)
Für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ definieren wir das Kreuzprodukt (oder Vektorprodukt) durch

$$
\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} . \tag{5.72}
$$

Satz 14. (Eigenschaften von $\times$)
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

(i) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ *(antikommutativ)*

(ii) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ *(Distributivgesetz)*

(iii) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$

(iv) $|\vec{a} \times \vec{b}| =$ *Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms*

(v) $\vec{a} \times \vec{b}$ *ist orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$ (bzgl. des kanonischen Skalarprodukts)*

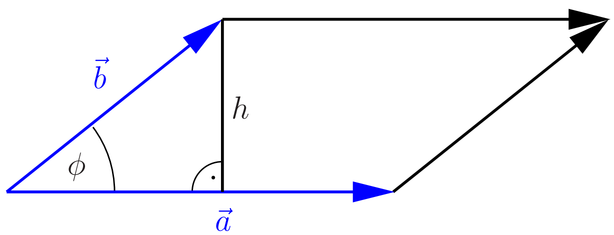
(vi) *falls $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$, bilden $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ ein Rechtssystem* *(rechte Hand-Regel)*

Bemerkung: (ii) & (iii): Linearität
Beweis:

(i) klar lt. Def. (vertausche b_j und a_j)
übrigens: $\Rightarrow \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

(ii) & (iii) explizit nachrechnen

(iv) Fläche:



$$
\begin{aligned}
F &= |\vec{a}|h \\
&= |\vec{a}||\vec{b}|\sin\phi \\
&= |\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\phi} \\
&= \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}\vec{b}|^2}
\end{aligned} \tag{5.73}
$$

einerseits:

$$
\begin{aligned}
(\vec{a}\times\vec{b})^2 = (a_2b_3)^2 + (a_3b_2)^2 - 2a_2b_2a_3b_3 \\
+ (a_3b_1)^2 + (a_1b_3)^2 - 2a_3b_3a_1b_1 \\
+ (a_1b_2)^2 + (a_2b_1)^2 - 2a_1b_1a_2b_2
\end{aligned} \tag{5.74}
$$

andererseits:

$$
\begin{aligned}
\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2 &= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \\
&= \cancel{a_1^2b_1^2} + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 \\
&\quad + a_2^2b_1^2 + \cancel{a_2^2b_2^2} + a_2^2b_3^2 \\
&\quad + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 + \cancel{a_3^2b_3^2} \\
&\quad \cancel{-a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2} \\
&\quad - 2a_2b_2a_3b_3 - 2a_3b_3a_1b_1 - 2a_1b_1a_2b_2
\end{aligned} \tag{5.75}
$$

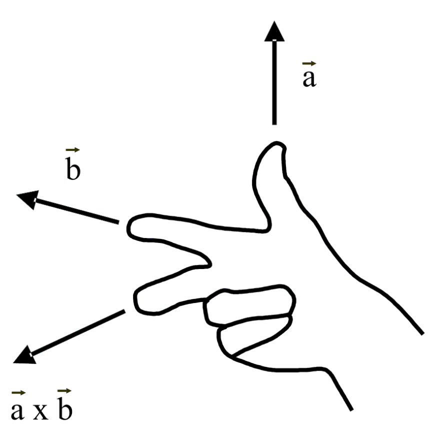
also $F = |\vec{a}\times\vec{b}|$

(v)

$$
\begin{aligned}
\vec{a}(\vec{a}\times\vec{b}) &= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3 + a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1 = 0 \\
\vec{b}(\vec{a}\times\vec{b}) &= -\vec{b}(\vec{b}\times\vec{a}) = 0
\end{aligned} \tag{5.76}
$$

(vi) Zunächst überprüfen wir: $\vec{e}_1\times\vec{e}_2 = \vec{e}_3$
(sowie $\vec{e}_2\times\vec{e}_3 = \vec{e}_1$ und $\vec{e}_3\times\vec{e}_1 = \vec{e}_2$)

Allgemein:
Nenne die Richtung von $\vec{a}$ die x_1-Richtung,
bilde $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\underbrace{\left(\vec{b} - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|}\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)}_{\text{nenne } x_2\text{-Richtung}}$,
dann zeigt $\vec{a}\times\vec{b}$ wieder in x_3-Richtung.



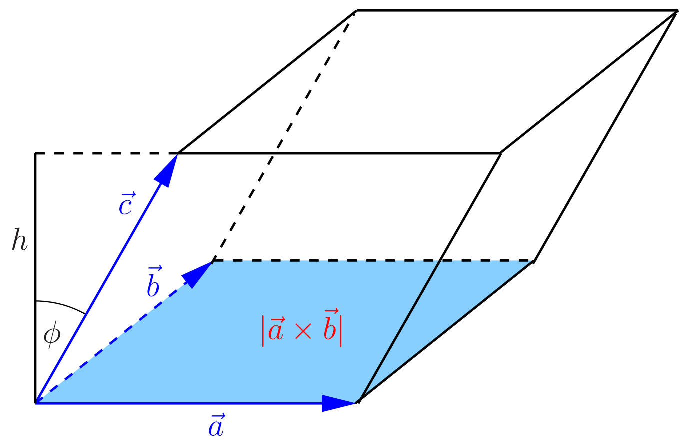
Definition: (Spatprodukt)
Die Abbildung $|\cdot,\cdot,\cdot| : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\left|\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right| = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \tag{5.77}$$

heißt Spatprodukt.

Eigenschaften:

1. $\left|\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right| = \left|\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right| = \left|\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right|$
2. $\left|\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right| = -\left|\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right|$
3. Der Betrag von $\left|\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right|$ ist gleich dem Volumen des, von den Vektoren aufgespannten, Parallelepipeds bzw. Spats.



Beweis:

1. explizit nachrechnen
2. folgt aus $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$
3. $\left|\left|\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right|\right| = \underbrace{|\vec{a} \times \vec{b}|}_{\text{Grundfläche}} \; \underbrace{|\vec{c}|\,\cos\phi}_{\text{Höhe}} = V$

5.7 Geraden und Ebenen

Geraden:

(i) gegeben: Punkt $\vec{p}_1 \in \mathbb{R}^n$ und Richtung $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$,

$$g = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \vec{x} = \vec{p}_1 + \vec{v}t\,,\; t \in \mathbb{R}\} \tag{5.78}$$

(ii) gegeben: zwei Punkte $\vec{p}_1,\ \vec{p}_2 \in \mathbb{R}^n$,

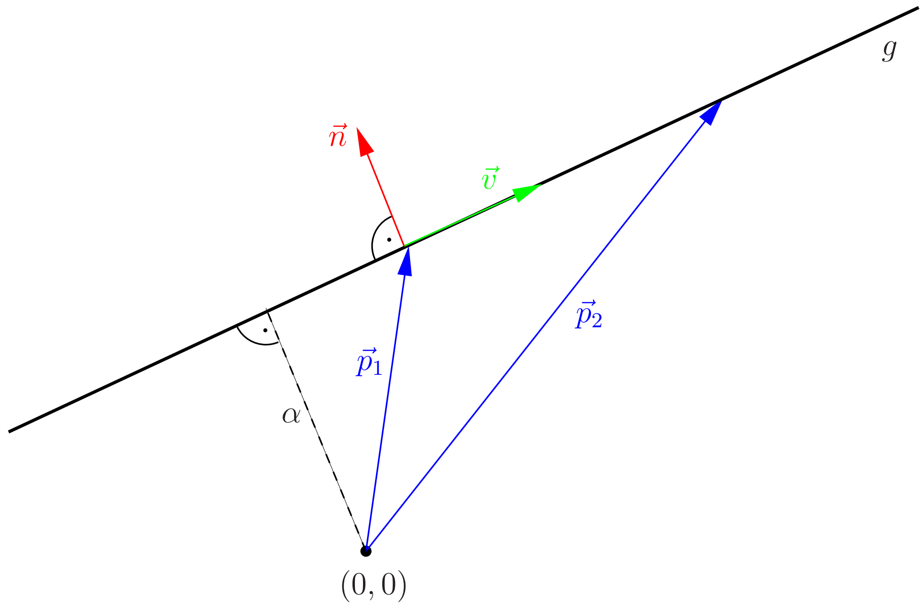
$$g = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \vec{x} = \vec{p}_1 + (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)t\,,\; t \in \mathbb{R}\} \tag{5.79}$$

(iii) **speziell im** $\mathbb{R}^2$
gegeben: Punkt $\vec{p}_1$ und Normalenrichtung $\vec{n}$ (kurz: $\vec{n} \perp g$)

$$\begin{aligned} g &= \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, (\vec{x} - \vec{p}_1)\vec{n} = 0\right\} \\ &= \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \vec{x}\vec{n} = \alpha\,,\; \alpha = \vec{p}_1\vec{n}\right\}\,. \end{aligned} \tag{5.80}$$

- parameterfreie Darstellung

- Falls $|\vec{n}| = 1$, dann ist $|\alpha|$ der Abstand der Gerade vom Ursprung.



Ebenen:

(i) gegeben: Punkt $\vec{p}_1 \in \mathbb{R}^n$ und 2 Richtungen $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ l.u.,

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \vec{x} = \vec{p}_1 + \vec{v}s + \vec{w}t\,,\ s,t \in \mathbb{R}\} \tag{5.81}$$

(ii) gegeben: zwei Punkte $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2 \in \mathbb{R}^n$ und eine Richtung $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{p}_2 - \vec{p}_1$, $\vec{v}$ l.u.,

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \vec{x} = \vec{p}_1 + (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)s + \vec{v}t\,,\ s,t \in \mathbb{R}\} \tag{5.82}$$

(iii) gegeben: drei Punkte $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3 \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{p}_2 - \vec{p}_1$, $\vec{p}_3 - \vec{p}_1$ l.u.,

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \vec{x} = \vec{p}_1 + (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)s + (\vec{p}_3 - \vec{p}_1)t\,,\ s,t \in \mathbb{R}\} \tag{5.83}$$

(iv) **speziell im** $\mathbb{R}^3$
gegeben: Punkt $\vec{p}_1$ und $\vec{n} \perp E$,

$$\begin{aligned} E &= \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, (\vec{x} - \vec{p}_1)\vec{n} = 0\right\} \\ &= \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \vec{x}\vec{n} = \alpha\,,\ \alpha = \vec{p}_1\vec{n}\right\}\,. \end{aligned} \tag{5.84}$$

- parameterfreie Darstellung
- Falls $|\vec{n}| = 1$, dann ist $|\alpha|$ der Abstand der Ebene vom Ursprung.
- Darstellung heißt Hessesche Normalform, falls $|\vec{n}| = 1$ und $\vec{n}$ so, dass $\alpha \geq 0$.

Geraden im $\mathbb{R}^3$: Schnitte zweier nicht paralleler Ebenen, z.B. parameterfreie Darstellung,

$$g = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \vec{x}\vec{n}_1 = \alpha_1\,,\ \vec{x}\vec{n}_2 = \alpha_2\right\}\,, \tag{5.85}$$

mit $\vec{n_1}, \vec{n}_2$ l.u.

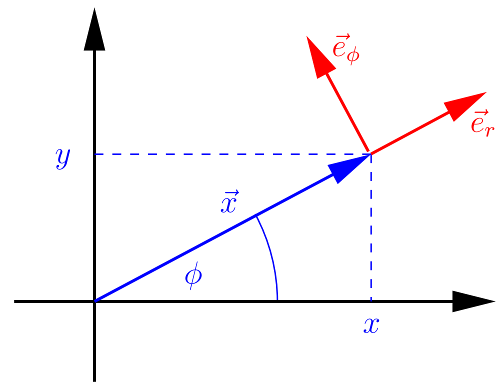
5.8 Kurven und Spezielle Koordinatensysteme

Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$:
$\vec{x} = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ lässt sich auch durch Radius $r \in [0, \infty)$ (Abstand zum Ursprung) und Winkel $\phi \in [0, 2\pi)$ charakterisieren,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}\,, \\ \phi &= \arctan \tfrac{y}{x} \quad \text{(Zweig beachten)}\,. \end{aligned} \tag{5.86}$$

Umgekehrt:

$$x = r \cos \phi\,, \quad y = r \sin \phi \tag{5.87}$$



Bemerkung: Für $(0, 0)$ ist ϕ nicht defniniert.

Einheitsvektoren (an jedem Punkt – mitgeführtes Koordinatensystem):

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}\,, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \tag{5.88}$$

mit

$$\begin{aligned} |\vec{e}_r|^2 = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1\,, &\quad |\vec{e}_\phi|^2 = 1\,, \\ \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\phi = \cos \phi(-\sin \phi) + \sin \phi \cos \phi = 0\,, \end{aligned} \tag{5.89}$$

also ONB, und

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} = r\vec{e}_r \tag{5.90}$$

Definition: (Kurven im $\mathbb{R}^n$)
Eine Abbildung

$$\begin{aligned} \vec{x}: \quad \mathbb{R} \supseteq I &\quad \to \quad \mathbb{R}^n \\ t &\quad \mapsto \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.91}$$

heißt Kurve im $\mathbb{R}^n$.

Die (Momentan-)Geschwindigkeit (entlang der Kurve) ist die (komponentenweise) Ableitung nach t,

$$\dot{\vec{x}}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}\,. \tag{5.92}$$

Analog: Beschleunigung $\ddot{\vec{x}}(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{x}(t)$.

Beispiele:

1.

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \vec{x}_0 + \vec{v}t\,, \qquad \vec{x}_0, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ fest} \\ \Rightarrow \qquad \dot{\vec{x}}(t) &= \vec{v}\,, \qquad \ddot{\vec{x}}(t) = \vec{0} \end{aligned} \tag{5.93}$$

(Gerade, gleichförmige Bewegung)

2.

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \frac{1}{2}\vec{a}t^2\,, \qquad \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \text{ fest} \\ \Rightarrow \qquad \dot{\vec{x}}(t) &= \vec{a}t\,, \qquad \ddot{\vec{x}}(t) = \vec{a} \end{aligned} \tag{5.94}$$

(Gerade, gleichförmig beschleunigte Bewegung)

3. Kurve im $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $r(t)$ und $\phi(t)$:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos\big(\phi(t)\big) \\ r(t)\sin\big(\phi(t)\big) \end{pmatrix} \tag{5.95}$$

Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{r}(t)\cos\big(\phi(t)\big) - r(t)\sin\big(\phi(t)\big)\,\dot{\phi}(t) \\ \dot{r}(t)\sin\big(\phi(t)\big) + r(t)\cos\big(\phi(t)\big)\,\dot{\phi}(t) \end{pmatrix} \\ &= \dot{r}(t)\begin{pmatrix} \cos\big(\phi(t)\big) \\ \sin\big(\phi(t)\big) \end{pmatrix} + r(t)\,\dot{\phi}(t)\begin{pmatrix} -\sin\big(\phi(t)\big) \\ \cos\big(\phi(t)\big) \end{pmatrix} \\ &= \dot{r}(t)\,\vec{e}_r + r(t)\,\dot{\phi}(t)\,\vec{e}_\phi \end{aligned} \tag{5.96}$$

Beispiel zum Beispiel: $\phi(t) = \omega t, \quad r(t) = R, \quad \omega, R$ fest

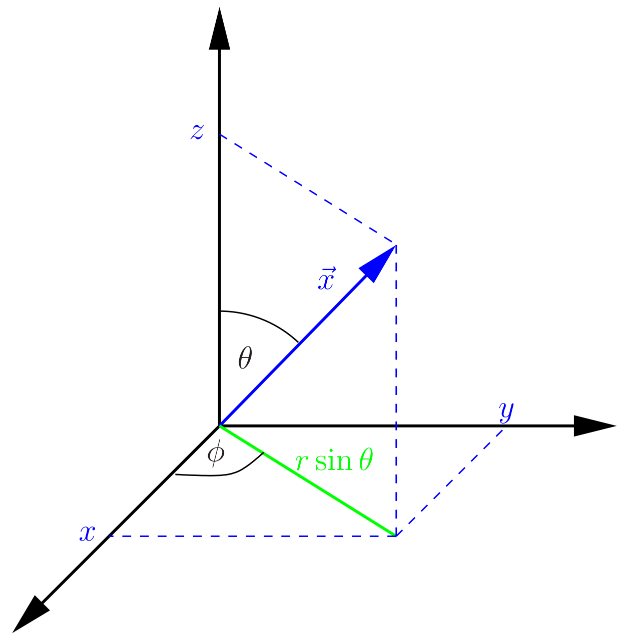
$$\dot{\vec{x}}(t) = 0\,\vec{e}_r + R\omega\,\vec{e}_\phi \qquad (\text{bzw. } \vec{e}_{\phi(t)=\omega t}) \tag{5.97}$$

(Kreis, mit Winkelgeschwindigkeit ω durchlaufen)

Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$:
$\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ lässt sich durch Radius $r = |\vec{x}|$ und zwei Winkel, θ und ϕ, charakterisieren,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad (5.98)$$

$r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi)$.



Umgekehrt:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,, \\ \phi &= \arctan\tfrac{y}{x} \quad \text{(Zweig beachten!)}\,, \\ \theta &= \arccos\tfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad (\text{da } \tfrac{z}{r} = \cos\theta). \end{aligned} \qquad (5.99)$$

6 Matrizen und Determinanten

6.1 Matrizen

Definition: Eine $m \times n$-Matrix A ist ein rechteckiges Zahlenschema,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m_1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

mit m Zeilen und n Spalten. Die $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (oder $\in \mathbb{C}$) heißen Elemente (oder Komponenten) der Matrix. Wir schreiben

$$A = (a_{ij}) \tag{6.2}$$

und sagen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (bzw. $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$).

Bemerkungen:

1. Vektoren $\in \mathbb{R}^n$ lassen sich als Matrizen auffassen, entweder als Spaltenvektor,

   $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \tag{6.3}$$

   oder als Zeilenvektor,

   $$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n}. \tag{6.4}$$

2. Die Addition zweier Matrizen gleichen Typs definieren wir komponentenweise,

   $$\begin{aligned} &A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}) \\ &C = A + B \quad \text{mit} \quad C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \end{aligned} \tag{6.5}$$

   z.B.

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

3. Ebenso die Multiplikation mit Skalaren,

   $$\begin{aligned} &A = (a_{ij}), \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &D = \lambda A \quad \text{mit} \quad D = (d_{ij}), \quad d_{ij} = \lambda a_{ij}, \end{aligned} \tag{6.7}$$

   z.B.

   $$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

4. Damit wird $\mathbb{R}^{m\times n}$ Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit den üblichen Rechenregeln und Dimension $\dim \mathbb{R}^{m\times n} = mn$.
   Neutrales Element der Addition bzw. "Nullvektor" ist die Nullmatrix:
$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} . \tag{6.9}$$

Definition: Für zwei Matrizen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times \ell}$ und $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$ definieren wir das Matrixprodukt durch
$$C = AB \quad \text{mit} \quad C = (c_{ij}) , \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{ik} b_{kj} , \tag{6.10}$$
kurz: *Zeile mal Spalte*.

Bemerkung: Ebenso wird für $A \in \mathbb{C}^{m\times \ell}$ und $B \in \mathbb{C}^{\ell\times n}$ das Produkt $AB \in \mathbb{C}^{m\times n}$ definiert.

Beispiel:
$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4} \\ AB &= \begin{pmatrix} 1 & 32 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4} \end{aligned} \tag{6.11}$$

zum Rechnen:
$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{4} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{5} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{6} & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{32} & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{6.12}$$
$$\mathbf{32 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6}$$

BA ist hier gar nicht definiert!

Bemerkungen:

1. Ist z.B. $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ so existieren zwar sowohl AB als auch BA, haben aber unterschiedliche Form: $AB \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $BA \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
2. Sind A und B quadratisch, so gilt i.A. trotzdem $AB \neq BA$ (nichtkommutativ), z.B.
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} , \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{6.13}$$

3.
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{6.14}$$

heißt Einheitsmatrix, mit Elementen

$$I = (\delta_{ij}), \qquad \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \qquad \text{(Kronecker-}\delta\text{)} \tag{6.15}$$

Für jede quadratische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (oder $\in \mathbb{C}^{n\times n}$) gilt

$$AI = IA = A\,, \tag{6.16}$$

denn, z.B. mit $C = (c_{ij}) = AI$,

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}\,. \tag{6.17}$$

Rechenregeln:

1. $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$
   $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$
2. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
3. $A(BC) = (AB)C$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$, alles andere Matrizen, Typen so, dass alle Produkte definiert.
Beweis: Nachrechnen.

Definition: Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Die Matrix $A^T = (a^T_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit Elementen

$$a^T_{ij} = a_{ji} \tag{6.18}$$

heißt Transponierte von A.

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T = (1, 2, 3)^T \tag{6.19}$$

Rechenregeln: ($\lambda \in \mathbb{R}$, A, B Matrizen – so, dass AB definiert)

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
3. $(A^T)^T = A$

4. $(AB)^T = B^T A^T$, denn, mit $C = AB$

$$c_{ij}^T = c_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{ki} = \sum_k a_{kj}^T b_{ik}^T = \sum_k b_{ik}^T a_{kj}^T \,, \tag{6.20}$$

   also $C^T = B^T A^T$. □

Anwendung (Matrixprodukt): Lineare Gleichungssysteme.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{6.21}$$

ist äquivalent zu

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{6.22}$$

mit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ bzw. $\in \mathbb{R}^{n\times 1}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$
(vgl. Kurzschreibweise für LGS).

Spezialfall: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$: quadratisches LGS ($n$ Gleichungen für n Unbekannte),

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{6.23}$$

Jetzt wäre es schön, wenn wir durch A "teilen" könnten, um $\vec{x}$ zu bekommen.

Definition: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wir nennen A^{-1} die zu A inverse Matrix, falls gilt

$$A^{-1}A = I \qquad \text{und} \qquad AA^{-1} = I \,. \tag{6.24}$$

Bemerkungen:

1. Nicht alle Matrizen sind invertierbar, z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{6.25}$$

   Annahme: $\exists\ B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$\begin{aligned} BA &= I \qquad | \cdot A \quad \text{von rechts} \\ B \underbrace{A^2}_{=0} &= A \qquad \text{Widerspruch!} \end{aligned} \tag{6.26}$$

2. Falls existent, so ist Inverse eindeutig bestimmt, denn:
   Annahme: $BA = I$ und $AC = I$. (z.z.: $B = C$)

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C \qquad \square \tag{6.27}$$

3. quadratisches LGS $A\vec{x} = \vec{b}$, A invertierbar $\Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, eindeutig!

Berechnung: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, betrachte

$$AX = I \tag{6.28}$$

falls lösbar, dann $X = A^{-1}$. Spaltenweise:

$$X = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)\,, \quad I = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)\,, \tag{6.29}$$

d.h. $\vec{x}_i = i$-te Spalte von X. Es gilt

$$AX = (A\vec{x}_1, \ldots, A\vec{x}_n) \stackrel{!}{=} (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) \tag{6.30}$$

d.h. wir lösen simultan die n LGSe $A\vec{x}_i = \vec{e}_i$. Praktisch: Gauß-Algorithmus

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} A & I \end{array} \right) \\ \hline \vdots \\ \hline \left(\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array} \right) \end{array} \tag{6.31}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{6.32}$$

$$\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -\frac{c}{a} \quad | \cdot 1/a \\ + \end{array} \\ \hline
\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ | \cdot \frac{a}{ad-bc} \end{array} \\ \hline
\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right) \begin{array}{l} + \\ -\frac{b}{a} \end{array} \\ \hline
\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{a} + \frac{bc}{a(ad-bc)} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right)
\end{array} \tag{6.33}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{bc}{a(ad-bc)} = \frac{1}{a}\frac{ad-bc+bc}{ad-bc} = \frac{d}{ad-bc} \tag{6.34}$$

also

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\,, \qquad \textbf{falls } ad - bc \neq 0\,. \tag{6.35}$$

Wir nennen die Zahl

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \tag{6.36}$$

die Determinante von A.
Sie bestimmt, ob A invertierbar ist ($\det A \neq 0$) oder nicht ($\det A = 0$).

6.2 Determinanten

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_3 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \right]_3$$

ist also Fläche (mit Vorzeichen) des, von den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \ \in \mathbb{R}^2$$

aufgespannten, Parallelogramms (vgl. Kreuzprodukt). Vorzeichen:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\,, \qquad \det \left(\vec{a}, \vec{b} \right) = -\det \left(\vec{b}, \vec{a} \right) .$$

Verallgemeinerung auf höhere Dimension? Suche Abbildung

$$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}\,, \tag{6.37}$$

die das Volumen des, von den Spaltenvektoren der Matrix aufgespannten Parallelepipeds liefert (mit Orientierung, d.h. VZ) ⇒ Gewünschte Eigenschaften:

(i) Linearität in jeder Spalte, insbesondere

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \lambda \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n) = \lambda \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n) \quad \forall\, j = 1, \ldots, n$$

(ii) Normierung

$$\det I = \det(\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n) = 1$$

(Volumen des n-dimensionalen Einheitswürfels: $1 \cdot 1 \cdots 1 = 1^n = 1$)

(iii) Alternierend, d.h. wechselt das Vorzeichen, wenn wir zwei Spalten vertauschen.

Folgerungen:

(i) ⇒

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^{n} C_{j_1 \ldots j_n} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$$

(Jeder Summand enthält genau ein Element aus jeder Spalte.)

(ii) ⇒

$$\det I = C_{1\,2\,3 \ldots n} = 1 \tag{6.38}$$

(iii) :

$$\det(\vec{e}_{j_1}, \ldots, \vec{e}_{j_n}) = C_{j_1 \ldots j_n} \tag{6.39}$$

vertausche zwei Spalten

$$
\begin{aligned}
C_{\dots j_k \dots j_l \dots} &= \det(\dots, \vec{e}_{j_k}, \dots, \vec{e}_{j_l}, \dots) \\
&= -\det(\dots, \vec{e}_{j_l}, \dots, \vec{e}_{j_k}, \dots) = -C_{\dots j_l \dots j_k \dots}
\end{aligned} \tag{6.40}
$$

Sind nun zwei der Indizes gleich (also $j_l = j_k$, $l \neq k$), dann ist das zugehörige C Null, d.h. jeder Summand enthält jetzt genau ein Element aus jeder Spalte **und** jeder Zeile. Weiter folgt mit $j_l \neq j_k$: Beträge aller $C_{j_1 \dots j_n}$ sind gleich ($= 1$).

Damit sind alle C festgelegt!

Beispiele:

- $n = 2$: $\quad C_{11} = C_{22} = 0, \quad C_{12} = 1, \quad C_{21} = -1 \quad$ (passt, s.o.)
- $n = 3$

$$
\begin{aligned}
C_{123} &= 1 && \text{vertausche 1. und 2. Index} \\
C_{213} &= -1 && \text{vertausche 2. und 3. Index} \\
C_{231} &= 1 && \text{etc.} \\
C_{321} &= -1 && \\
C_{312} &= 1 && \\
C_{132} &= -1 &&
\end{aligned} \tag{6.41}
$$

Damit erhalten wir tatsächlich das Spatprodukt, denn

$$
\begin{aligned}
\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) &= a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}}_{= \vec{a} \times \vec{b}} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \left| \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right| .
\end{aligned} \tag{6.42}
$$

Mit etwas Indexgymnastik ergeben sich folgende weitere
Eigenschaften der Determinante:

1. $\det A^T = \det A$
2. für (obere) Dreiecksmatrizen: Produkt der Diagonalelemente

$$
\det \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn} \tag{6.43}
$$

3. Spalten oder Zeilen vertauschen: Faktor (-1)
insbesondere: Sind zwei Spalten (Zeilen) gleich, so verschwindet die Determinante.

4. det ist linear in jeder Zeile und Spalte, vgl. Forderung (i), insbesondere

$$\det\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j + \vec{b}, \ldots, \vec{a}_n\right) = \det\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n\right) + \det\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{a}_n\right) . \tag{6.44}$$

   Ebenso für Zeilen.

5. Vielfaches einer Spalte (Zeile) zu einer anderen: det invariant, denn (4. mit $\vec{b} = \lambda \vec{a}_k$, $k \neq j$)

$$\begin{aligned} \det\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j + \lambda \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n\right) &= \det\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n\right) \\ &\quad + \underbrace{\lambda \det\left(\vec{a}_1, \ldots, \underbrace{\vec{a}_k}_{j\text{-te Spalte}}, \ldots, \vec{a}_n\right)}_{=0\,, \quad \text{da } \vec{a}_k \text{ doppelt vorkommt}} . \end{aligned} \tag{6.45}$$

   also Gauß (ohne Durchmultiplizieren)
   Beispiel:

$$\begin{array}{c} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rceil^{-1} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \tag{6.46}$$

   d.h. $\det A = 1 \cdot 3 \cdot 4 = 12$.

6. $\det A \neq 0$
   $\Leftrightarrow$ Spalten von A sind l.u. (ebenso Zeilen)
   $\Leftrightarrow$ A invertierbar
   $\Leftrightarrow$ LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ hat für jedes $\vec{b}$ eine eindeutige Lösung, nämlich $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

Satz 15. (Determinantenmultiplikationssatz)
Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (oder $\in \mathbb{C}^{n\times n}$). Dann gilt

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B\,. \tag{6.47}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det(A\vec{b}_1, \ldots, A\vec{b}_n)\,, \quad \text{wobei } B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n) = (b_{ij})\,,\ \text{d.h. } \vec{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} \\
&= \det\left(\sum_{i_1=1}^{n} \vec{a}_{i_1} b_{i_1 1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} \vec{a}_{i_n} b_{i_n n}\right), \quad \text{wobei } A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n} b_{i_1 1} \cdots b_{i_n n} \underbrace{\det\left(\vec{a}_{i_1}, \ldots, \vec{a}_{i_n}\right)}_{=C_{i_1\ldots i_n} \det A} \qquad (6.48) \\
&= \det A \underbrace{\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n} b_{i_1 1} \cdots b_{i_n n}\, C_{i_1\ldots i_n}}_{=\det B}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Damit gilt auch (falls A invertierbar)

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,, \tag{6.49}$$

denn $\quad \det A \cdot \det A^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det I = 1.$

Satz 16. (Laplacescher Entwicklungssatz)
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die Matrix $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ entstehe aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \qquad (\textit{Entwicklung nach der } j\textit{-ten Spalte}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \qquad (\textit{Entwicklung nach der } i\textit{-ten Zeile})
\end{aligned} \tag{6.50}$$

(folgt unmittelbar aus der Definition der Determinante)

Bemerkungen:

1. Vorzeichen sind schachbrettartig verteilt:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{6.51}$$

2. Vor allem sinnvoll, für Zeilen (Spalten) mit vielen Nullen.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} &= 1\det\begin{pmatrix}5 & 6\\ 8 & 9\end{pmatrix} - 4\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 8 & 9\end{pmatrix} + 7\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{pmatrix}\\
&\text{(Entwicklung nach der 1. Spalte)}\\
&= -4\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 8 & 9\end{pmatrix} + 5\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ 7 & 9\end{pmatrix} - 6\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 7 & 8\end{pmatrix}\\
&\text{(Entwicklung nach der 2. Zeile)}
\end{aligned} \tag{6.52}$$

7 Komplexe Zahlen

Führe eine Zahl i ein, mit

$$\mathrm{i}^2 = -1\,, \tag{7.1}$$

bzw. auch $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Komplexe Zahlen

$$\mathbb{C} = \{z = x + \mathrm{i}y \,|\, x, y \in \mathbb{R}\} \tag{7.2}$$

Rechnen wie mit reellen Zahlen, d.h. $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= x_1 + \mathrm{i}y_1 + x_2 + \mathrm{i}y_2 \\ &= (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= x_1x_2 + \mathrm{i}x_1y_2 + \mathrm{i}y_1x_2 + \mathrm{i}^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + y_1x_2) \end{aligned} \tag{7.3}$$

$\overline{z} = x - \mathrm{i}y$ heißt **komplex konjugiert** zu $z = x + \mathrm{i}y$. Es folgt

$$\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}\,, \tag{7.4}$$

und insbesondere $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper mit

- neutralem Element der Addition: $0 = 0 + \mathrm{i}0$
- neutralem Element der Multiplikation: $1 = 1 + \mathrm{i}0$
- additiv Inversem (zu $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$): $-z = -x - \mathrm{i}y$
- multiplikativ Inversem (zu $z \neq 0$, $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$):

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x - \mathrm{i}y}{(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} \qquad \left(\text{insbesondere: } \mathrm{i}^{-1} = \tfrac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}\right). \tag{7.5}$$

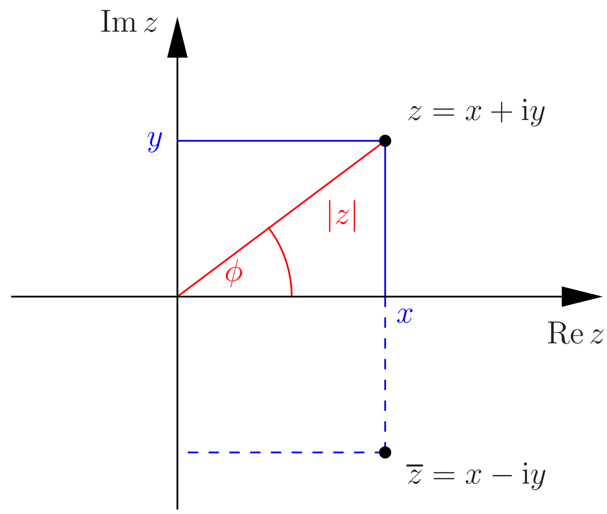
Wir nennen $x \in \mathbb{R}$ **Realteil** und $y \in \mathbb{R}$ **Imaginärteil** von $z = x + \mathrm{i}y$ und schreiben

$$\operatorname{Re} z = x\,, \qquad \operatorname{Im} z = y \tag{7.6}$$

Offensichtlich gilt

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}\,, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}} \tag{7.7}$$

Anschaulich:
Gaußsche Zahlenebene



Polardarstellung: Charakterisiere z durch Betrag und Argument (Phase)

$$\begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \arg z \in [0, 2\pi) \end{aligned} \tag{7.8}$$

$\arg z = \arctan \frac{y}{x}$ (Zweig!)

Damit $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ und $z = r\cos\phi + \mathrm{i}r\sin\phi$.

Einheitskreis: $\{z = \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi \,|\, \phi \in [0, 2\pi)\}$,
denn $|\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi|^2 = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$.

7.1 Komplexe e-Funktion

Behauptung: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi$, $\forall\ \phi \in \mathbb{R}$, (vgl. Prolog)
wobei die komplexe e-Funktion über die bekannte Reihe definiert wird,

$$\mathrm{e}^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,, \qquad z \in \mathbb{C} \tag{7.9}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n \phi^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{2n}}{(2n)!}\phi^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{2n+1}}{(2n+1)!}\phi^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\phi^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,\mathrm{i}}{(2n+1)!}\phi^{2n+1} \\ &= \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi\,. \qquad \square \end{aligned} \tag{7.10}$$

Damit nochmal Polardarstellung: $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}$.

Definieren wir auch $\sin z$ und $\cos z$ für $z \in \mathbb{C}$ durch die Reihen, so gilt auch

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\,. \tag{7.11}$$

Rechnung genau gleich wie (7.10)

Eigenschaften: (für $\phi \in \mathbb{R}$ und $z, w \in \mathbb{C}$)

1. $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}| = 1$
2. $\mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^w = \mathrm{e}^{z+w}$
3. $\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$, insbesondere $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}$
4. $\arg \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \phi$ (bis auf Vielfache von 2π)
5. $\cos z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}, \qquad \sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$

Beispiele:

1. **Moivre-Formel**

$$(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)^n = \cos(n\phi) + \mathrm{i}\sin(n\phi)\,, \qquad \forall\,\phi \in \mathbb{R}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{7.12}$$

   denn $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})^n$

2. Additionstheoreme (früher geometrisch bewiesen) lassen sich nun direkt nachrechnen, z.B. $(z, w \in \mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
\sin z\,\cos w + \cos z\,\sin w &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2\mathrm{i}} \\
&= \frac{1}{4\mathrm{i}}\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+w)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(z-w)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-z+w)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-z-w)} \\
&\qquad + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+w)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(z-w)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-z+w)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-z-w)}\Big] \qquad (7.13) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+w)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z+w)}}{2\mathrm{i}} \\
&= \sin(w + z)\,.
\end{aligned}$$

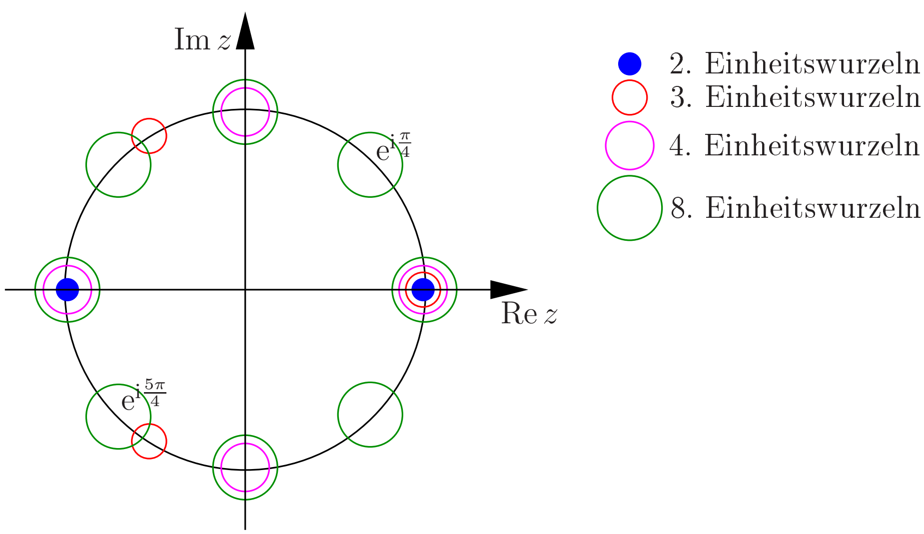
3. $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{n} \sin(\nu x) &= \operatorname{Im} \sum_{\nu=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x} = \operatorname{Im} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1} \qquad\qquad (x \neq 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}) \\
&= \operatorname{Im} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n+1}{2}x} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n+1}{2}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n+1}{2}x}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}\right)} \, \frac{2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} \\
&= \operatorname{Im} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n}{2}x} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}_{\text{reell}} \\
&= \sin\left(\tfrac{n}{2}x\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Beispiele 1 & 2 zunächst übersprungen.

Einheitswurzeln. Gesucht sind alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von $z^n = 1$.
Ansatz: $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \Rightarrow z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi} \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow n\phi = 2\pi\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \qquad \text{Lösungen:} \quad \phi_\nu = \frac{2\pi}{n}\nu\,, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{7.15}$$

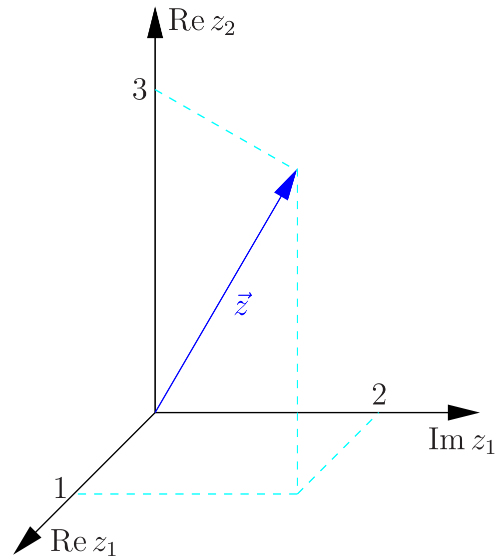


n-te Wurzeln aus $w \in \mathbb{C}$:
$z^n \stackrel{!}{=} w = |w|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$

$$z = \sqrt[n]{|w|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\psi}{n} + \mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\nu}\,, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1\,. \tag{7.16}$$

Beispiel $\sqrt{\mathrm{i}}$: $\quad \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$
$z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ und $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$ erfüllen $z_j^2 = \mathrm{i}$.

7.2 $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^{m\times n}$ und Verwandtes



$\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$:
Dimension 2, Basis $\{1, \mathrm{i}\}$, isomorph[10] zu $\mathbb{R}^2$ (Gaußsche Zahlenebene);

analog ist z.B. $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{R}$ isomorph[10] zu $\mathbb{R}^4$, z.B.

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \qquad (7.17)$$

Mit dem Zeichnen der 4. Achse, Im z_2, tue ich mich etwas schwer…

Weiter sind z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (7.19)$$

l.u. in $\mathbb{C}^2$ als VR über $\mathbb{R}$, aber
l.a. in $\mathbb{C}^2$ als VR über $\mathbb{C}$.

Komplexe Vektorräume: Vektorräume über dem Körper $\mathbb{C}$
Alles wie bei reellen Vektorräumen, mit einer Ausnahme:
Skalarprodukte, $V \times V \to \mathbb{C}$, müssen

$$(\mathrm{S1})' \qquad \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle = \overline{\langle \vec{w}, \vec{z} \rangle}$$

erfüllen.

Wegen (S2), $\langle \vec{z}, \lambda\vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle$, folgt

$$\langle \lambda\vec{z}, \vec{w} \rangle = \overline{\lambda} \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle \qquad (7.20)$$

Beispiel: $V = \mathbb{C}^n$ über $\mathbb{C}$

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \qquad z_j, w_j \in \mathbb{C} \qquad (7.21)$$

[10] *isomorph* heißt hier: es gibt eine lineare bijektive Abbildung, z.B.

$$\mathbb{C}^2 \ni \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z_1 \\ \mathrm{Im}\, z_1 \\ \mathrm{Re}\, z_2 \\ \mathrm{Im}\, z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \qquad (7.18)$$

die die Vektorraumstruktur erhält.

Kanonisches Skalarprodukt:

$$\langle \vec{z}, \vec{w} \rangle = \overline{\vec{z}}^T \vec{w} := \sum_{j=1}^{n} \overline{z_j}\, w_j \tag{7.22}$$

mittlerer Ausdruck in Matrixschreibweise
Zugehörige Norm:

$$\|\vec{z}\| = |\vec{z}\,| = \sqrt{\overline{\vec{z}}^T \vec{z}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2} \tag{7.23}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\rangle &= (1,\, -\mathrm{i},\, 1-\mathrm{i}) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= 3 - 5\mathrm{i} + \underbrace{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}_{=2} = 5 - 5\mathrm{i} \end{aligned} \tag{7.24}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) + 4} = \sqrt{6} \tag{7.25}$$

Matrizen mit komplexen Einträgen: $A = (a_{jk}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$.
Komplex konjugierte Matrix:

$$\overline{A} = (\overline{a_{jk}})\,, \qquad \overline{AB} = \overline{A}\;\overline{B}\,. \tag{7.26}$$

Alles wie gehabt, z.B. Determinanten,

$$\det \begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} & 1+3\mathrm{i} \\ 4\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix} = 4 + 1 - (4\mathrm{i} - 12) = 17 - 4\mathrm{i} \tag{7.27}$$

8 Integration

Definition: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Eine diffbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f, falls gilt $F'(x) = f(x) \; \forall \; x \in I$.

Bemerkung: Ist F Stammfunktion von f, so auch $\tilde{F}$ mit $\tilde{F}(x) = F(x) + c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$, denn

$$\tilde{F}'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f \,. \tag{8.1}$$

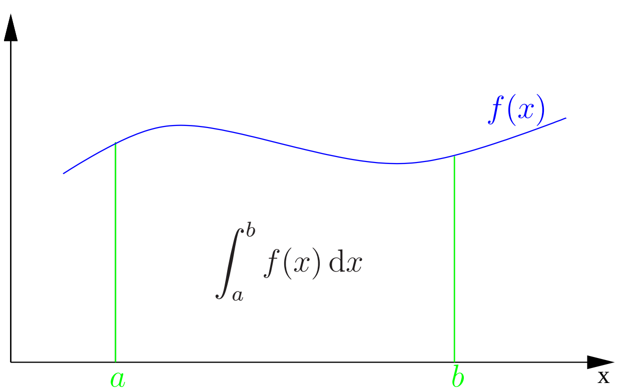
So erhalten wir alle Stammfunktionen von f, denn, sind F und G Stammfunktionen, so gilt

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \,, \tag{8.2}$$

d.h. $F(x) - G(x)$ ist konstant.
(Nur konstante Funktionen haben Ableitung $\equiv 0$:
$g'(x) = 0 \; \forall \; x \in I$
$\Rightarrow g$ ist monoton wachsend und fallend $\forall \; x \in I$
$\Rightarrow g$ ist konstant.)

Fläche unter Funktionsgraph: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b \in I$, $a < b$, $f : I \to \mathbb{R}_0$ stetig auf I und $f(x) \geq 0 \; \forall \; x \in I$. Wir bezeichen den Flächeninhalt der Fläche, begrenzt durch den Graph von f, die x-Achse und die senkrechten Geraden $x = a$ und $x = b$, mit

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \,. \tag{8.3}$$



Behauptung: (Hauptsatz der Differential- Integralrechung)

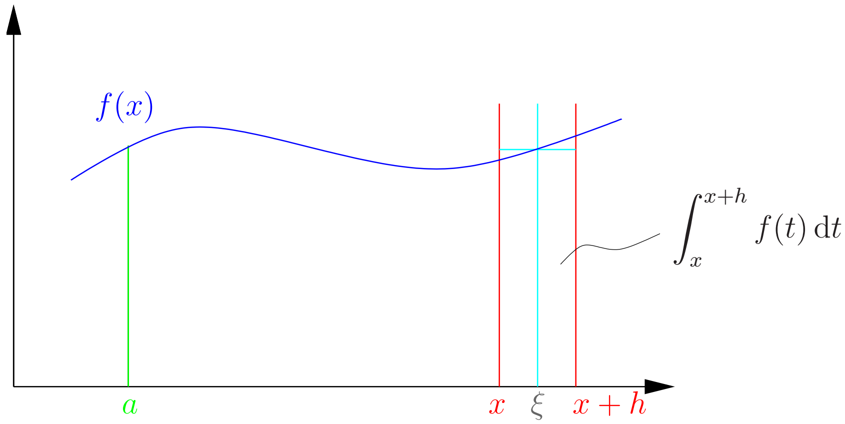
$$F(x) := \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t \tag{8.4}$$

ist Stammfunktion von $f \; \forall \; x \in I$, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t = f(x) \tag{8.5}$$

Beweisidee:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{8.6}$$



Da f stetig, existiert sicher ein $\xi \in [x, x+h]$, so dass

$$\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = h\,f(\xi)\,. \tag{8.7}$$

Damit gilt

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(\lim_{h\to 0} \xi) = f(x) \tag{8.8}$$

□

Berechnung von Integralen: Nun gilt[11]

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,, \tag{8.9}$$

wobei F eine beliebige Stammfunktion von f ist, denn:

Sei F eine beliebige Stammfunktion von f, so existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + c \\ \Rightarrow F(a) &= \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t + c = c \\ \text{und} \quad F(b) &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + c \\ \Rightarrow F(b) - F(a) &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,. \qquad \square \end{aligned} \tag{8.10}$$

[11] Wenn wir vorher präzise definiert hätten, was ein Integral eigentlich ist, dann würden wir diese Formel *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* nennen.

Beispiel: $a \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{a}} \sin(ax)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(ax)}{a}\bigg|_0^{\frac{\pi}{a}} = \left(-\frac{\cos(\pi)}{a}\right) - \left(-\frac{\cos(0)}{a}\right) = \frac{2}{a} \tag{8.11}$$

Bemerkung: Wir schreiben auch (unbestimmtes Integral)

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) \qquad \text{falls} \qquad F'(x) = f(x)\,. \tag{8.12}$$

Beispiele:

1. $$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,, \qquad n \neq -1 \tag{8.13}$$
2. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log x \tag{8.14}$$

Eigenschaften des Integrals: (f, g stückweise stetig und beschränkt, $b > a$)

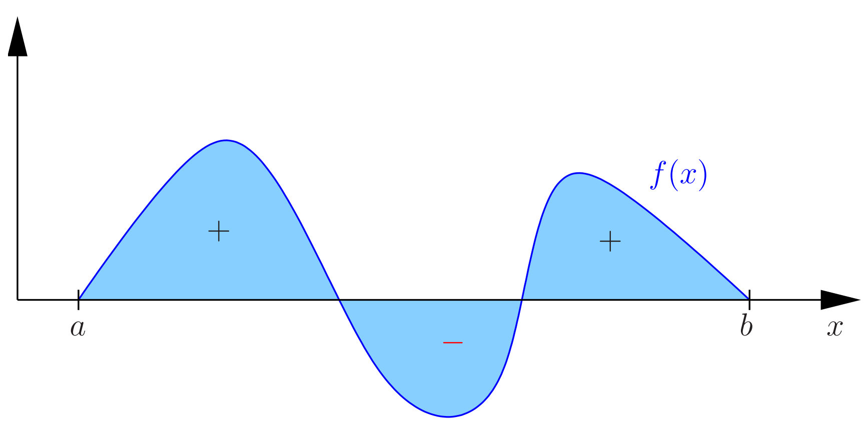
(i) Linearität:

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{8.15}$$

Zunächst nur für nicht-negative Integranden, d.h. $f(x), g(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b]$ und $\lambda, \mu \geq 0$, aber wenn wir Flächen unter der x-Achse einen negativen Flächeninhalt zuordnen,

$$\int_a^b [-f(x)]\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{8.16}$$

dann dürfen f, g sowie λ, μ beliebiges Vorzeichen haben.



(ii) Stückweise integrieren: (dann ist uns auch egal, ob f in c unstetig ist)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.17}$$

Zunächst nur für $c \in [a,b]$, aber wenn wir festlegen, dass

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.18}$$

dann können wir auch c außerhalb $[a,b]$ zulassen (falls beide Integrale auf der rechten Seite existieren).

(iii) Für Abschätzungen:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,, \tag{8.19}$$

vgl. Skizze unter (i), sowie

$$f(x) \le g(x)\ \forall\, x \in [a,b] \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{8.20}$$

8.1 Uneigentliche Integrale

Wir definieren

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.21}$$

falls $\int_a^b \dots$ für beliebig große b existiert.
Analog für $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \pm\infty$, $a < b$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{y\to b-} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.22}$$

Beispiele

1.
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b}_{= -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1 \tag{8.23}$$

2.
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \left(= \lim_{y\to 0+}\int_y^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\right) = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2 - 0 = 2 \tag{8.24}$$

Bemerkung: Falls uneigentlich an mehreren Stellen, müssen wir die Limites unabhängig bilden dürfen, z.B.

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} \ne \lim_{y\to 0+}\left(\int_{-1}^{-y}\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_y^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) \tag{8.25}$$

Linke Seite existiert nicht,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \lim_{b\to 0-} \int_{-1}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \lim_{a\to 0+} \int_{a}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&= \lim_{b\to 0-} \Big[\log|x|\Big]_{-1}^{b} + \lim_{a\to 0+} \Big[\log x\Big]_{a}^{1} \\
&= \lim_{b\to 0-} \log|b| - \lim_{a\to 0+} \log a \\
&= \text{“}-\infty+\infty\text{”}
\end{aligned} \tag{8.26}$$

wohingegen

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0+} \left(\int_{-1}^{-y} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{y}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \right) &= \lim_{y\to 0+} \left(\log|x| \Big|_{-1}^{-y} + \log x \Big|_{y}^{1} \right) \\
&= \lim_{y\to 0+} (\log y - \log y) = 0
\end{aligned} \tag{8.27}$$

Übrigens: $(\log|x|)' = \frac{1}{x}$, denn (Kettenregel)

$$\log|x| = \begin{cases} \log x\,, & x>0 \\ \log(-x)\,, & x<0 \end{cases} \quad , \qquad (\log|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}\,, & x>0 \\ \frac{1}{(-x)}(-1)\,, & x<0 \end{cases} \tag{8.28}$$

8.2 Integrationstechniken

Satz 17. (Partielle Integration)
Seien f und g stetig auf $[a,b]$ und stetig diffbar auf (a,b), dann gilt

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.29}$$

Beweis: Wegen $(fg)' = f'g + fg'$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left[f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)\right]\,\mathrm{d}x &= f(x)\,g(x)\Big|_a^b \\
&= \int_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{abziehen} \Rightarrow \text{Beh.}} \quad \square
\end{aligned} \tag{8.30}$$

Beispiele:

1.

$$\begin{aligned}
\int \underset{g}{x}\, \underset{f'}{\cos x}\,\mathrm{d}x &= \underset{g}{x}\, \underset{f}{\sin x} - \int \underset{g'}{1} \cdot \underset{f}{\sin x}\,\mathrm{d}x \\
&= x\sin x + \cos x
\end{aligned} \tag{8.31}$$

2.

$$\begin{aligned}\int \log x \,\mathrm{d}x &= \int 1 \cdot \log x \,\mathrm{d}x \\ &= x \log x - \int x \,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= x \log x - x\end{aligned} \tag{8.32}$$

Analog:

$$\begin{aligned}\int \arcsin x \,\mathrm{d}x &= x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\end{aligned} \tag{8.33}$$

Uneigentliche Integrale zunächst übersprungen

3.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x &= -\sin x\, \cos x + \int \cos^2 x \,, \mathrm{d}x \\ &= -\sin x\, \cos x + \int (1 - \sin^2 x)\,, \mathrm{d}x \\ &= -\sin x\, \cos x + x - \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\,\sin x\, \cos x\end{aligned} \tag{8.34}$$

Satz 18. (Integralrestglied für Taylor)
Sei f $n+1$-mal stetig diffbar auf (a,b), dann gilt

$$f(x) - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n \,\mathrm{d}t\,, \tag{8.35}$$

wobei $x, x_0 \in (a,b)$.

Beweis: (vollständige Induktion)
$n = 0$:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{o.k.} \tag{8.36}$$

$n \to n+1$:

$$
\begin{aligned}
&f(x) - \sum_{\nu=0}^{n+1} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu \\
&= f(x) - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\
&\underset{\text{I.V.}}{=} \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,\mathrm{d}t - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\
&\underset{\text{p.I.}}{=} \underbrace{\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_{t=x_0}^{t=x}}_{=0+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}} - \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)\mathrm{d}t - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)\,(x-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{8.37}
$$

□

Satz 19. (Substitutionsregel)
Sei f stetig auf I und $g : [a,b] \to J \subset I$ stetig diffbar, dann gilt

$$\int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{8.38}$$

Beweis: Sei F Stammfunktion von f,

- $\displaystyle\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$
- $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(g(t)) = F'(g(t))\,g'(t) = f(g(t))\,g'(t)$

$$\int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{d}t = F(g(t))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) \quad \square \tag{8.39}$$

Beispiele:

1.
$$\int \frac{g'(t)}{g(t)}\,\mathrm{d}t = \log|g(t)|\,, \qquad \text{mit } f(x) = \frac{1}{x}\,, F(x) = \log|x| \tag{8.40}$$

z.B.

$$
\begin{aligned}
&\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\log|\cos x|\,, && \text{mit } g(x) = \cos x\,, \\
&\int_{\mathrm{e}}^{10} \frac{\mathrm{d}x}{x\log x} = \log\log x\Big|_{\mathrm{e}}^{10} = \log\log 10\,, && \text{mit } g(x) = \log x\,,
\end{aligned}
\tag{8.41}
$$

2. $n \neq -1$:

$$\int \sin^n x \, \cos x \, , \mathrm{d}x \qquad \sin x = t \, , \quad \cos x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \quad \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \cos x \right)$$
$$= \int t^n \, \mathrm{d}t = \frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{\sin^{n+1}(x)}{n+1} \tag{8.42}$$

3.

$$\int_0^\pi \sin^2 x \, \mathrm{d}x$$
$$\sin x = t \, , \quad \cos x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \, , \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\cos x} = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t^2}} \tag{8.43}$$
$$\neq \int\limits_{\sin 0 = 0}^{\sin \pi = 0} \frac{t^2}{\sqrt{1 - t^2}} \mathrm{d}t = 0 \text{ ?}$$

Vorsicht: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \; \forall x$,
aber $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ nur dort, wo $\cos x \geq 0$,
z.B. nicht für $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$.
Merke: Vorsicht beim Wurzelziehen!
Übrigens: Das Integral lösen wir z.B. mit partieller Integration, siehe Beispiel dort.

Einschub: Ableiten nach oberer und/oder unterer Grenze

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int\limits_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t) \, \mathrm{d}t \tag{8.44}$$

Sei F Stammfunktion von f, d.h. $F' = f$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int\limits_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t) \, \mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \Big(F(\psi(x)) - F(\phi(x)) \Big) \\ &= F'(\psi(x)) \, \psi'(x) - F'(\phi(x)) \, \phi'(x) \\ &= f(\psi(x)) \, \psi'(x) - f(\phi(x)) \, \phi'(x) \end{aligned} \tag{8.45}$$

F taucht nicht mehr auf! Geht also auch, wenn wir F nicht explizit kennen!
Beispiel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int\limits_0^{\sin x} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\sin^2 x} \cos x \, . \tag{8.46}$$

Uneigentliche Integrale zunächst übersprungen

Partialbruchzerlegung

Idee:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \log|x-2| - \log|x-1| \\ &= \log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\end{aligned} \tag{8.47}$$

Wie finden wir die Zerlegung? (inkl. weiterer Beispiele)
Ziel: Berechne

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \tag{8.48}$$

mit Polynomen, P, Q, mit reellen Koeffizienten – o.B.d.A Zählergrad < Nennergrad (sonst Polynomdivision). Sei Q von Grad n, d.h.

$$Q(x) = c_n \prod_{j=1}^{r} (x - x_j)^{\nu_j}\,, \qquad \sum_{j=1}^{r} \nu_j = n\,, \quad c_n \neq 0\,, \tag{8.49}$$

Nullstellen x_j mit Vielfachheiten ν_j:

- Entweder $x_j \in \mathbb{R}$
- oder $x_j \notin \mathbb{R} \Rightarrow \overline{x_j}$ ist auch Nullstelle,

denn mit

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k\,, \qquad c_j \in \mathbb{R}\,, \tag{8.50}$$

gilt: Aus $Q(x_j) = \sum_{k=0}^{n} c_k x_j^k = 0$ folgt

$$0 = \overline{Q(x_j)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{c_k} \overline{x_j^k} = \sum_{k=0}^{n} c_k \overline{x_j}^k = Q(\overline{x_j})\,. \quad \square \tag{8.51}$$

Beispiel: $Q(x) = 1 + x^2$, Nullstellen $\pm\mathrm{i}$.

Nun gilt:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_1^{(1)}}{x-x_1} &+ \frac{a_1^{(2)}}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{a_1^{(\nu_1)}}{(x-x_1)^{\nu_1}} \\ &+ \frac{a_2^{(1)}}{x-x_2} + \ldots + \frac{a_2^{(\nu_2)}}{(x-x_2)^{\nu_2}} \\ &\vdots \\ &+ \frac{a_r^{(1)}}{x-x_r} + \ldots + \frac{a_r^{(\nu_r)}}{(x-x_r)^{\nu_r}}\end{aligned} \tag{8.52}$$

mit Koeffizienten $a_j^{(k)} \in \mathbb{C}$. (Beweis: Auf Hauptnenner bringen.)

Falls Nullstelle komplex, so sind Koeffizienten der komplex konjugierten Nullstelle auch das Komplexkonjugierte der Koeffizienten (nur dann wird Summe der Partialbrüche wieder reell).

Partialbrüche lassen sich integrieren

Beispiele

1.
$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} \tag{8.53}$$

1. Methode: Hauptnenner & Koeefizientenvergleich

$$\begin{aligned} &a(x-2) + b(x-1) = (a+b)x - (2a+b) \stackrel{!}{=} 1 \\ &\Rightarrow \quad a+b=0\,, \qquad 2a+b=-1 \qquad \text{(LGS)} \\ &\Rightarrow \quad b=-a\,, \qquad a=-1 \qquad \Rightarrow \quad (b=1) \end{aligned} \tag{8.54}$$

2. Methode: Grenzübergänge ("Zuhaltemethode")

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} \qquad \Big| (x-1) \quad \text{danach} \quad x=1 \tag{8.55}$$

$$\frac{1}{-1} = a$$

$$\ldots \qquad \Big| (x-2) \quad \text{danach} \quad x=2 \tag{8.56}$$

$$\frac{1}{1} = b$$

2.
$$\frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} \qquad \Big| (x-1)^2\,, \quad x=1 \tag{8.57}$$

$$1+1 = 2 = b$$

$$\ldots \qquad \Big| (x-1)\,, \quad x \to \infty \tag{8.58}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 = a$$

also

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \log|x-1| - \frac{2}{x-1} \end{aligned} \tag{8.59}$$

3.

$$\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = \frac{a}{x-\mathrm{i}} + \frac{b}{(x-\mathrm{i})^2} + \frac{\overline{a}}{x+\mathrm{i}} + \frac{\overline{b}}{(x+\mathrm{i})^2} \qquad \Big|(x-\mathrm{i})^2\,, \quad x=\mathrm{i} \tag{8.60}$$

$$\frac{\mathrm{i}^2-1}{(\mathrm{i}+\mathrm{i})^2} = \frac{1}{2} = b$$

$$\ldots \qquad \Big|(x-\mathrm{i})\,, \quad x\to\infty \tag{8.61}$$

$$0 = a+\overline{a} \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{Re} a = 0$$

$$\ldots \qquad \Big| x=0 \tag{8.62}$$

$$-1 = \mathrm{i}a - \frac{1}{2} - \mathrm{i}\overline{a} - \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{Im} a = 0 \tag{8.63}$$

also

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-\mathrm{i})^2} + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+\mathrm{i})^2} \\ &\underset{(*)}{=} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}} + \frac{1}{x+\mathrm{i}}\right) = -\frac{x}{x^2+1}\end{aligned} \tag{8.64}$$

Da wir uns nicht sicher sind, ob $(*)$ o.k. war, machen wir zumindest den Test:

$$\left(-\frac{x}{x^2+1}\right)' = -\frac{(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} \qquad \text{o.k.} \tag{8.65}$$

Übrigens, auch gut für Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)(x-2)} &= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu - \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu 2^{-\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(1-2^{-(\nu+1)}\right)x^\nu\end{aligned} \tag{8.66}$$

Bisher hätten wir das mit dem Cauchy-Produkt gerechnet.

weiteres Beispiel

$$\int_3^\infty \frac{7x+1}{(x^2-1)(x-2)}\mathrm{d}x \tag{8.67}$$

Nenner-Nullstellen: $-1, 1, 2$, d.h.

$$\frac{7x+1}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}\,, \tag{8.68}$$

$|\cdot(x+1)$, $x \to -1$: $\frac{-7+1}{(-1-1)(-1-2)} = A$, d.h. $A = -1$.
Analog: $B = -4$, $C = 5$. Damit

$$\begin{aligned}
\int_3^\infty \frac{7x+1}{(x^2-1)(x-2)}\mathrm{d}x &= \int_3^\infty \left(-\frac{1}{x+1} - \frac{4}{x-1} + \frac{5}{x-2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \Big[-\log(x+1) - 4\log(x-1) + 5\log(x-2)\Big]_3^\infty \\
&= \left[\log\frac{(x-2)^5}{(x+1)(x-1)^4}\right]_3^\infty = \log 1 - \log\frac{1}{4\cdot 2^4} \\
&= 6\log 2
\end{aligned} \tag{8.69}$$

8.3 Riemannsche Zwischensummen

Bisher haben wir das Integral etwas unscharf als Fläche unter dem Funktionsgraph definiert. In diesem Abschnitt präzisieren wir, was wir damit genau meinen. Dabei erkennen wir, dass hinter jedem Integral ein *komplizierter Grenzwert* steckt, und motivieren neben auch die Schreibweise "dx"

Definition: (Riemannsche Zwischensummen)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ beschränkt und stückweise stetig (d.h. höchstens an endlich vielen Stellen unstetig). Zerlege $[a,b]$ in n Teilintevalle $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, n$, mit

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,, \qquad \text{(Partition)} \tag{8.70}$$

und wähle aus jedem eine Zwischenstelle

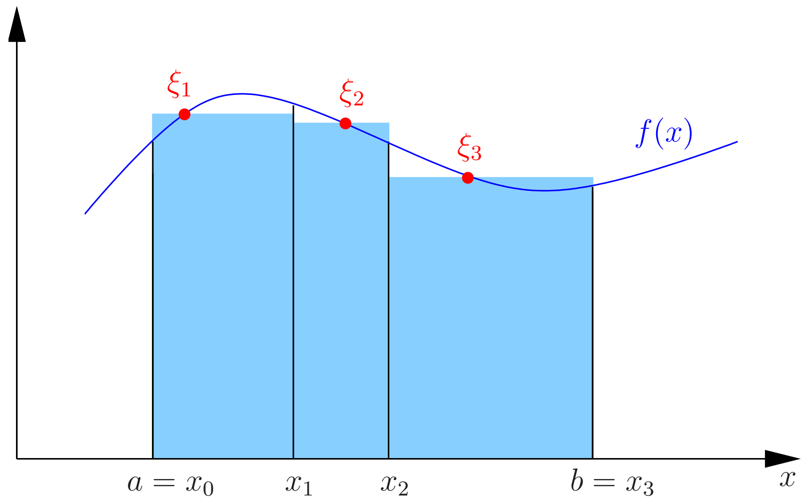
$$\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]\,. \qquad \text{(Belegung)} \tag{8.71}$$

Wir nennen

$$Z_n := \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \tag{8.72}$$

eine (Riemannsche) Zwischensumme. Die Länge des größten Teilintervalls heißt Feinheit μ_n der Partition,

$$\mu_n = \max_j\,(x_j - x_{j-1})\,. \tag{8.73}$$

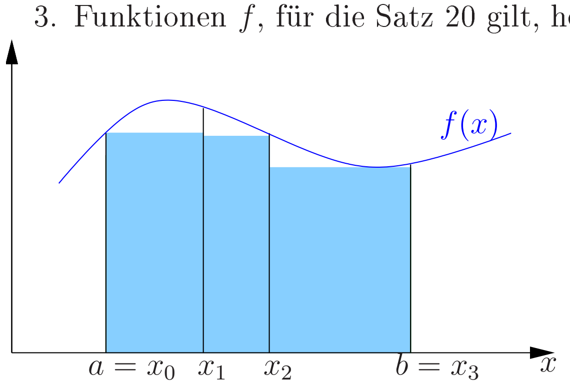


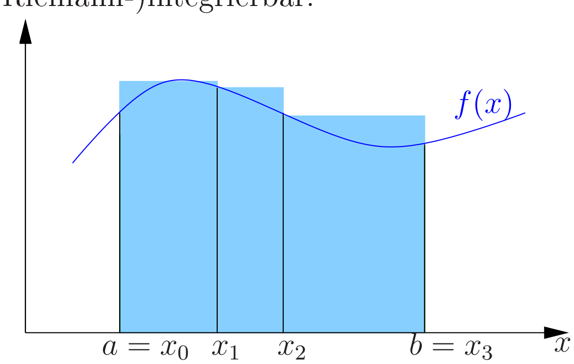
Satz 20. *Sei alles wie in obiger Definition, dann gilt: Für jede Folge von Partitionen und Belegungen mit* $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$ *existiert* $\lim_{n\to\infty} Z_n$*, der Grenzwert ist für alle solchen Folgen gleich, und wir schreiben*

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{8.74}$$

Bemerkungen:

1. Aus $\Delta x = x_{j+1} - x_j$ wird $\mathrm{d}x$: infinitesimale x-Änderung.
2. "Stützstellen" ξ_j müssen nicht äquvidistant gewählt werden (z.B. bei numerischer Approximation).
3. Funktionen f, für die Satz 20 gilt, heißt (Riemann-)integrierbar.





Beweisidee:
Bilde Ober- und Untersummen,

$$S_n^O := \sum_{j=1}^{n} \max_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x) \cdot (x_j - x_{j-1}) \qquad \text{und} \qquad S_n^U := \sum_{j=1}^{n} \min_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x) \cdot (x_j - x_{j-1})\,, \tag{8.75}$$

dann gilt

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) \cdot (b-a) \le S_n^U \le Z_n \le S_n^O \le \max_{x\in[a,b]} f(x) \cdot (b-a)\,. \tag{8.76}$$

S_n^U nach oben beschränkt. Bilden wir das $n+1$-te Folgenglied durch Teilen eines Teilintevalls, so ist $S_{n+1}^U \geq S_n^U \Rightarrow$ Konvergenz. I.A. ist Konvergenz etwas aufwendiger. S_n^O analog. Die beiden Limites sind gleich (und damit auch der von Z_n), da

$$f \text{ stückweise stetig } \Rightarrow \max_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x) - \min_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ für fast alle } j\,. \tag{8.77}$$

9 Differentialgleichungen (DGLn)

9.1 DGLn erster Ordung mit getrennten Veränderlichen

Beispiel:

$$y'(x) = x^2(1 + y^2(x)) \tag{9.1}$$

Idee:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,, \tag{9.2}$$

wir probieren mal...

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x^2(1 + y^2) \\
\frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2} &= x^2\,\mathrm{d}x \qquad\qquad (\text{“getrennte Veränderliche”}) \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2} &= \int x^2\,\mathrm{d}x \\
\arctan y &= \frac{x^3}{3} + c\,, \qquad\qquad c \in \mathbb{R} \\
y &= \tan\left(\frac{x^3}{3} + c\right)
\end{aligned} \tag{9.3}$$

Ist das gut gegangen? Test:[12]

$$y'(x) = \Bigg[\underbrace{1 + \tan^2\left(\frac{x^3}{3} + c\right)}_{=1+y^2}\Bigg]\,x^2 \tag{9.4}$$

Allgemein:

$$y'(x) = f(x)\,g(y) \tag{9.5}$$

1. Gibt es ein y_0 mit $g(y_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = y_0$ (konstant) löst die DGL
2. Daher nun $g(y) \neq 0$ (wo's interessiert)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x)\,g(y) \\
\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} &= f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{9.6}$$

Definiere nun

$$F(x) := \int^x f(t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad \Phi(y) := \int^y \frac{\mathrm{d}t}{g(t)}\,. \tag{9.7}$$

[12] Wdh: $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

DGL wird äquivalent zu

$$\Phi(y) = F(x)\,, \tag{9.8}$$

und

$$y = \Phi^{-1}(F(x)) \tag{9.9}$$

löst – falls Φ umkehrbar!

Wenn g stets das gleiche VZ hat, dann ist Φ streng monoton und damit umkehrbar.

Betrachte nun das Anfangswertproblem (AWP)

$$y'(x) = f(x)\,g(y)\,, \qquad y(x_0) = y_0\,. \tag{9.10}$$

Definiere neu

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad \Phi(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)}\,, \tag{9.11}$$

falls $g(t) > 0\ \forall\, t \in [y_0, y]$ (oder $g(t) < 0\ \forall\, t \in [y_0, y]$).

Behauptung: $y(x) = \Phi^{-1}(F(x))$ löst AWP.

Beweis: $y(x_0) = \phi^{-1}(F(x_0)) = \phi^{-1}(0) = y_0$, da $\Phi(y_0) = 0$.

$$\begin{aligned} y'(x) &= \Phi^{-1\prime}(F(x))\,f(x) \\ &= \frac{1}{\Phi'(\underbrace{\Phi^{-1}(F(x))}_{=y})}\,f(x)\,, \qquad\qquad \Phi'(y) = \frac{1}{g(y)} \\ &= g(y(x))\,f(x)\,. \end{aligned} \tag{9.12}$$

$\square$

Beispiele:

1.

$$\begin{aligned} & y' = y^2\,, && y(0) = 1 \qquad (9.13) \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}x\,, && y(0) = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & \int_1^y \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\tilde{y}^2} = \int_0^x \mathrm{d}\tilde{x} \\ \Leftrightarrow\quad & \left[-\frac{1}{\tilde{y}}\right]_1^y = x \\ \Leftrightarrow\quad & -\frac{1}{y} + 1 = x \\ \Leftrightarrow\quad & y = \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

2. homogene lineare DGL (s.u.) ist auch von diesem Typ

$$
\begin{aligned}
& & y' + f(x)y &= 0\,, \qquad\qquad y(0) = 3 \\
&\Leftrightarrow & \int_3^y \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\tilde{y}} &= -\int_0^x f(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} \\
&\Leftrightarrow & \log y - \log 3 &= -\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \\
&\Leftrightarrow & y &= 3\mathrm{e}^{-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}
\end{aligned}
\tag{9.14}
$$

9.2 Lineare DGLn erster Ordnung

$$y'(x) + f(x)\,y(x) = g(x) \tag{9.15}$$

heißt lineare inhomogene DGL 1. Ordnung.

$$y'(x) + f(x)\,y(x) = 0 \tag{9.16}$$

heißt zugehörige homogene lineare DGL 1. Ordnung.

Bemerkungen: (Linearität)

1. Sind y_1 und y_2 zwei Lösungen der homogenen Gleichung, so ist

$$\alpha y_1 + \beta y_2\,, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C})\,, \tag{9.17}$$

ebenfalls Lösung der homogenen Gleichung; also ist die Lösungsmenge

$$L_h = \{y\,|\,y' + f(x)\,y = 0\} \tag{9.18}$$

ein Vektorraum.

2. Sind y_1 und y_2 zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung, so ist $y_1 - y_2$ Lösung der homogenen Gleichung; also ist, mit einer Lösung y_p der inhomogenen Gleichung, die Lösungungsmenge

$$
\begin{aligned}
L_i &= \{y\,|\,y' + f(x)\,y = g(x)\} \\
&= \{y\,|y = y_p + y_h\,,\ y_h \in L_h\}\,.
\end{aligned}
\tag{9.19}
$$

3. Außerdem

$$L_h = \left\{ y \,\middle|\, y(x) = c\mathrm{e}^{-\int^x f(t)\,\mathrm{d}t}\,,\ c \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}) \right\} \tag{9.20}$$

da $\left(c\mathrm{e}^{-\int^x f(t)\,\mathrm{d}t}\right)' = c\mathrm{e}^{-\int^x f(t)\,\mathrm{d}t}(-f(x))$. Dies sind auch alle Lösungen (später).[13]

[13] Die Schreibweise $= \int^x f(t)\,\mathrm{d}t =: F(x)$ bezeichnet eine Stammfunktion von f, d.h. $F'(x) = f(x)$.

Beispiele: ($c \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, nach Bedarf)

1. $y' - y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad L_h = \left\{ y \,\middle|\, y(x) = c\mathrm{e}^{-\int^x (-1)\,\mathrm{d}t} = c\mathrm{e}^x \right\}$
2. $y' - x^3 y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad L_h = \left\{ y \,\middle|\, y(x) = c\mathrm{e}^{\int^x t^3\,\mathrm{d}t} = c\mathrm{e}^{\frac{x^4}{4}} \right\}$
3. $y' + \dfrac{y}{2x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad L_h = \left\{ y \,\middle|\, y(x) = c\mathrm{e}^{-\int^x \frac{\mathrm{d}t}{2t}} = \frac{c}{\sqrt{|x|}} \right\}$
4. $y' + \dfrac{\sin x}{x} y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad L_h = \left\{ y \,\middle|\, y(x) = c\mathrm{e}^{-\int^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t} \right\}$

Bemerkungen:

1. einparametrige Lösungsmenge ($\dim L_h = 1$)
2. Oft hat man ein sogenanntes Anfangswertproblem (AWP): Gesucht ist Lösung von

$$y' + f(x)\,y = 0 \qquad \text{mit} \qquad y(x_0) = y_0 \tag{9.21}$$

Lösung:

$$y(x) = y_0 \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t} \tag{9.22}$$

denn $y(x_0) = y_0\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t} = y_0\mathrm{e}^0 = y_0$

Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung: (Variation der Konstanten)

$$y' + f(x)\,y = g(x) \tag{9.23}$$

Sei $F(x)$ Stammfunktion von f, d.h. $F' = f$.
$y(x) = c\mathrm{e}^{-F(x)}$ löst homogene Gleichung.
Ansatz für Lösung y_p der inhomogenen Gleichung:

$$y_p(x) = c(x)\,\mathrm{e}^{-F(x)}\,. \tag{9.24}$$

$$y_p' = c'\mathrm{e}^{-F} - c\mathrm{e}^{-F} f \tag{9.25}$$

in DGL

$$\left(c'\mathrm{e}^{-F} - c\mathrm{e}^{-F} f\right) + fc\mathrm{e}^{-F} = g \qquad \Rightarrow \qquad c' = g\mathrm{e}^F \tag{9.26}$$

also

$$c(x) = \int^x \mathrm{e}^{F(t)}\, g(t)\,\mathrm{d}t \tag{9.27}$$

und damit

$$y_p(x) = \mathrm{e}^{-F(x)} \int^x \mathrm{e}^{F(t)}\, g(t)\,\mathrm{d}t \tag{9.28}$$

Lösungsmenge

$$L_i = y_p + L_h = \left\{ y \,\middle|\, y(x) = \mathrm{e}^{-F(x)} \int^x \mathrm{e}^{F(t)}\, g(t)\,\mathrm{d}t + a\mathrm{e}^{-F(x)}\,,\ a \in \mathbb{R} \right\} \qquad (\text{oder } a \in \mathbb{C})\,. \tag{9.29}$$

Will man das AWP mit $y(x_0) = y_0$ lösen, so ist Lösung eindeutig bestimmt,

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t} \left(y_0 + \int_{x_0}^x \mathrm{e}^{\int_{x_0}^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau} g(t)\,\mathrm{d}t \right) \tag{9.30}$$

Beispiele:

1. $y' - y = 3, \quad L_h = \{y \,|\, y(x) = c\mathrm{e}^x\}$

$$y_p = \mathrm{e}^x \int^x \mathrm{e}^{-t}\, 3\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x(-\mathrm{e}^{-x})\,3 = -3 \tag{9.31}$$

   Oft einfacher: y_p raten.
   Also $L_i = \{y \,|\, y(x) = -3 + c\mathrm{e}^x \,|\, c \in \mathbb{R}\}$.
   AWP: $y(1) = 5$:

$$y(1) = -3 + c\mathrm{e} \stackrel{!}{=} 5 \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{8}{\mathrm{e}}, \tag{9.32}$$

   und $y(x) = -3 + 8\mathrm{e}^{x-1}$ löst AWP.

2. $y' - x^3 y = \sin x, \quad L_h = \{y \,|\, y(x) = c\mathrm{e}^{\frac{x^4}{4}}\}$

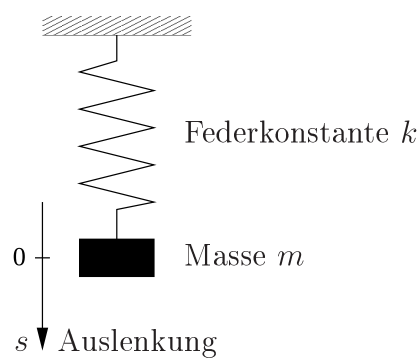
$$y_p = \mathrm{e}^{\frac{x^4}{4}} \int^x \mathrm{e}^{-\frac{t^4}{4}} \sin t\,\mathrm{d}t\,. \tag{9.33}$$

9.3 Lineare DGLn zweiter Ordung mit konstanten Koeffizienten

Beispiel: Federpendel

… auch Modell für Schwingung eines zweiatomigen Moleküls.
Rückstellkraft: $F = -ks$
Newton: $-ks = m\ddot{s}$
(Zeit t, $s = s(t)$, $\ddot{s} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$)
DGL:

$$\ddot{s}(t) + \frac{k}{m} s(t) = 0 \tag{9.34}$$



Lösungen: $s_1 = \sin(\omega t)$, $s_2 = \cos(\omega t)$ mit $\omega = \sqrt{k/m}$ (und Linearkombinationen), denn

$$\ddot{s}_{1,2} = -\omega^2 s_{1,2} \tag{9.35}$$

Allgemein:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \tag{9.36}$$

heißt inhomogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, $a_{0,1} \in \mathbb{R}$ oder $\in \mathbb{C}$; zugehörige homogene Gleichung:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0\,. \tag{9.37}$$

Bemerkungen: (Linearität)

1. Sind y_1 und y_2 zwei Lösungen der homogenen Gleichung, so auch
$$\alpha y_1 + \beta y_2 \,, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \,. \tag{9.38}$$
$\Rightarrow$ Lösungsmenge L_h ist ein Vektorraum.
2. Sind y_1 und y_2 Lösungen der inhomogenen Gleichung, so ist $y_1 - y_2$ Lösung der homogenen Gleichung, d.h.
$$L_i = y_p + L_h \tag{9.39}$$
wobei y_p eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

Lösungsmenge der homogenen DGL: $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$.
$$\chi(x) = x^2 + a_1 x + a_0 \tag{9.40}$$
heißt zugehöriges charakteristisches Polynom.
Ist λ Nullstelle von χ, d.h. $\chi(\lambda) = 0$
$\Rightarrow y(x) = c\mathrm{e}^{\lambda x}$, $c \in \mathbb{C}$ ist eine Lösung der DGL, denn
$$y'(x) = \lambda\, y(x) \,, \qquad y''(x) = \lambda^2\, y(x) \,, \tag{9.41}$$
in DGL:
$$y'' + a_1 y' + a_0 y = y\, \underbrace{(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0)}_{\chi(\lambda)=0} \,. \tag{9.42}$$
Funktioniert natürlich auch für lineare DGLn höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Im obigen **Beispiel** (Federpendel):
$$\chi(x) = x^2 + \omega^2 \tag{9.43}$$
Nullstellen: $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\omega$.
Lösungsmenge:
$$L_h = \left\{ s \,\middle|\, s(t) = c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + c_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \,,\ c_{1,2} \in \mathbb{C} \right\} \tag{9.44}$$
Die speziellen (rellen) Lösungen $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$ sind LK von $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega t}$,
$$\begin{aligned} \sin(\omega t) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2\mathrm{i}} \,, \qquad & c_1 &= \frac{1}{2\mathrm{i}} = -c_2 \,, \\ \cos(\omega t) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2} \,, \qquad & c_1 &= c_2 = \frac{1}{2} \,. \end{aligned} \tag{9.45}$$
Relle Lösungsmenge:
$$L_h^{\text{reell}} = \left\{ s \,\middle|\, s(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) \,,\ c_{1,2} \in \mathbb{R} \right\} \subset L_h \,. \tag{9.46}$$

Allgemein:

1. χ hat zwei verschiedene reelle Nullstellen, $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$L_h^{\text{reell}} = \left\{ y \,\middle|\, y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}\,,\ c_{1,2} \in \mathbb{C} \quad \in \mathbb{R} \right\} \tag{9.47}$$

2. χ hat komplex konjugierte Nullstellen, $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$: L_h wie oben.
Reelle Lösungen?

$$\lambda_1 = u + \mathrm{i}v \qquad (\lambda_2 = u - \mathrm{i}v) \tag{9.48}$$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{1}{2}\left(e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}\right) = e^{ux}\cos(vx) \\ y_2(x) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}\right) = e^{ux}\sin(vx) \end{aligned} \tag{9.49}$$

Federpendel: $u = 0$, $v = \omega$

$$L_h^{\text{reell}} = \left\{ y \,\middle|\, y(x) = c_1 e^{ux}\sin(vx) + c_2 e^{ux}\cos(vx)\,,\ c_{1,2} \in \mathbb{R} \right\} \tag{9.50}$$

3. χ hat eine doppelte Nullstelle, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$L_h^{\text{reell}} = \left\{ y \,\middle|\, y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x\, e^{\lambda x}\,,\ c_{1,2} \in \mathbb{C} \quad \in \mathbb{R} \right\} \tag{9.51}$$

Bleibt z.z.: $y = x e^{\lambda x}$ löst DGL.

$$\begin{aligned} y' &= e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x} \end{aligned} \tag{9.52}$$

in DGL

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = \underbrace{\lambda^2 x e^{\lambda x} + a_1 \lambda x e^{\lambda x} + a_0 x e^{\lambda x}}_{= x e^{\lambda x}(\lambda^2 + \lambda a_1 + a_0) = x e^{\lambda x}\chi(\lambda) = 0} + \underbrace{2\lambda e^{\lambda x} + a_1 e^{\lambda x}}_{e^{\lambda x}(2\lambda + a_1) = e^{\lambda x}\chi'(\lambda) = 0} \tag{9.53}$$

denn

$$\begin{aligned} \chi(x) &= x^2 + a_1 x + a_0 && = (x-\lambda)^2 \qquad \text{(doppelte Nullstelle)} \\ \chi'(x) &= 2x + a_1 && = 2(x-\lambda) \\ \chi'(\lambda) &= 2\lambda + a_1 && = 0\,. \end{aligned} \tag{9.54}$$

Bemerkungen:

1. Lösungsmenge ist stets zweidimensionaler Vektorraum.
2. Für ein AWP kann noch $y(x_0) = y_0$ und $y'(x_0) = v_0$ vorgegeben werden.

Beispiel: AWP für Federpendel

$$\ddot{s} + \omega^2 s = 0\,, \quad s(0) = 0\,,\ \dot{s}(0) = 1 \tag{9.55}$$

allgemeine Lösung

$$s(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \tag{9.56}$$

$$s(0) = c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad c_2 = -c_1 \tag{9.57}$$

$$\dot{s}(0) = i\omega c_1 - i\omega c_2 \stackrel{!}{=} 1 \qquad \Rightarrow \qquad 2i\omega c_1 = 1 \tag{9.58}$$

also

$$c_1 = \frac{1}{2i\omega} = -c_2 \qquad \Rightarrow \qquad s(t) = \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\,. \tag{9.59}$$

Lösung der inhomogenen DGL: Variation der Konstanten

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \tag{9.60}$$

Seien y_1 und y_2 zwei l.u. Lösungen der homogenen DGL. Ansatz für partikuläre Lösung:

$$y(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x) \tag{9.61}$$

Ableiten:

$$\begin{aligned} y'(x) &= c_1 y_1' + c_2 y_2' + \underbrace{c_1' y_1 + c_2' y_2}_{=:R(x)} \\ y''(x) &= c_1 y_1'' + c_1' y_1' + c_2 y_2'' + c_2' y_2' + R' \end{aligned} \tag{9.62}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} f(x) &= y'' + a_1 y' + a_0 y \\ f(x) &= \underbrace{c_1 y_1'' + a_1 c_1 y_1' + a_0 c_1 y_1}_{=0 \quad \text{da } y_1 \text{ homogene Lös.}} + \underbrace{c_2 y_2'' + a_1 c_2 y_2' + a_0 c_2 y_2}_{=0 \quad \text{da } y_2 \text{ homogene Lös.}} + c_1' y_1' + c_2' y_2' + R' + a_1 R \end{aligned} \tag{9.63}$$

Falls $R(x) \equiv 0$ (und damit $R' \equiv 0$): LGS für c_1' und c_2'

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + c_2' y_2 &= 0 \qquad (R(x) = 0) \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' &= f(x) \end{aligned} \tag{9.64}$$

Lösung, z.B. durch Cramersche Regel:

$$\begin{aligned} c_1' &= \frac{1}{W(x)} \det \begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{pmatrix} = -\frac{y_2(x) f(x)}{W(x)} \\ c_2' &= \frac{1}{W(x)} \det \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{pmatrix} = \frac{y_1(x) f(x)}{W(x)} \end{aligned} \tag{9.65}$$

mit der Wronski-Determinanten

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \tag{9.66}$$

Falls wir durch W teilen durften!

Lemma 21. (Wronski-Determinante)
Seien y_1 und y_2 Lösungen von

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

und $W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$. *Dann gilt:*

1. $W'(x) = -a_1 W(x)$ *(und damit* $W(x) = W(x_0)\mathrm{e}^{-a_1(x-x_0)}$*).*
2. $W(x)$ *besitzt keine Nullstelle* $\Leftrightarrow$ y_1 *und* y_2 *sind l.u.*

Beweis:

1.

$$\begin{aligned} W(x) &= y_1 y_2' - y_1' y_2 \\ W'(x) &= y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' \\ &\underset{\text{DGL}}{=} y_1(-a_1 y_2' - a_0 y_2) - y_2(-a_1 y_1' - a_0 y_1) \\ &= -a_1(y_1 y_2' - y_2 y_1') \\ &= -a_1 W(x) \end{aligned} \tag{9.67}$$

2.
   - Wegen Teil 1 gilt $W(x) = C\mathrm{e}^{-a_1 x}$ mit einer Kostanten C.
   - Da die e-Funktion keine (reellen) Nullstellen hat, ist W entweder überall Null (falls $C = 0$) oder nirgends (falls $C \neq 0$).
   - $W(x) = 0$ überall $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\binom{y_2}{y_2'}$ ist Vielfaches von $\binom{y_1}{y_1'}$. (Eigenschaft von det)

□

Also lautet eine partikuläre Lösung:

$$y_p(x) = -y_1(x)\int^x \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)}\,\mathrm{d}t + y_2(x)\int^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}\,\mathrm{d}t \tag{9.68}$$

Beispiel:

$$y'' + 5y' + 6y = \sin x \tag{9.69}$$

charakteristisches Polynom: $\chi(x) = x^2 + 5x + 6$

Nullstellen: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \qquad L_h = \left\{ y \,\middle|\, y(x) = c_1\mathrm{e}^{-2x} + c_2\mathrm{e}^{-3x},\ c_{1,2} \in \mathbb{C} \right\} \tag{9.70}$$

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{-3x} \\ -2\mathrm{e}^{-2x} & -3\mathrm{e}^{-3x} \end{pmatrix} = -3\mathrm{e}^{-5x} + 2\mathrm{e}^{-5x} = -\mathrm{e}^{-5x} \tag{9.71}$$

$$
\begin{aligned}
y_p &= -\mathrm{e}^{-2x}\int^x \frac{\mathrm{e}^{-3t}\sin t}{(-\mathrm{e}^{-5t})}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-3x}\int^x \frac{\mathrm{e}^{-2t}\sin t}{(-\mathrm{e}^{-5t})}\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{-2x}\int^x \mathrm{e}^{2t}\,\sin t\,\mathrm{d}t - \mathrm{e}^{-3x}\int^x \mathrm{e}^{3t}\sin t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{9.72}
$$

NR:

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}x &\underset{\text{p.I.}}{=} -\mathrm{e}^{\alpha x}\cos x + \alpha\int \mathrm{e}^{\alpha x}\cos x\,\mathrm{d}x \\
&\underset{\text{p.I.}}{=} -\mathrm{e}^{\alpha x}\cos x + \alpha\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin x - \alpha^2\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}x \\
\Rightarrow \quad \int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha\sin x - \cos x)}{1+\alpha^2}
\end{aligned}
\tag{9.73}
$$

…und damit:

$$
y_p = \frac{2\sin x - \cos x}{5} - \frac{3\sin x - \cos x}{10} = \frac{1}{10}\sin x - \frac{1}{10}\cos x\,. \tag{9.74}
$$

Bemerkung: Ansatz $y_p = A\sin x + B\cos x$ hätte auch zum Ziel geführt.

9.4 Existenz und Eindeutigkeit für DGLn 1. Ordnung

Hat das AWP $\quad y' = f(x,y)\,,\quad y(x_0) = y_0\,,\quad$ eine Lösung und ist diese eindeutig?

Beispiel: $y'(x) = 2\sqrt{|y(x)|}$, $y(0) = 0$.

Satz 22. (Picard-Lindelöf)
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei im Rechteck

$$
D = \big\{(x,y)\,\big|\,|x-x_0| \le a\,,\ |y-y_0| \le b\,,\ a,b\in\mathbb{R}^+ \textit{ fest}\big\} \subset \mathbb{R}^2 \tag{9.75}
$$

stetig und dort stetig nach y differenzierbar.[14] *Weiter seien M und h durch*

$$
M = \max_{(x,y)\in D}|f(x,y)| \quad \textit{und} \quad h = \min\left(a, \tfrac{b}{M}\right) \tag{9.76}
$$

definiert. Dann gibt es in der Umgebung

$$
U_h(x_0) = \big\{x\,\big|\,|x-x_0| < h\big\} \tag{9.77}
$$

der Stelle x_0 genau eine Lösung des AWPs

$$
y'(x) = f(x, y(x))\,,\quad y(x_0) = y_0\,. \tag{9.78}
$$

[14] Man sagt *partiell* nach y differenzierbar und meint: Man behandelt x wie eine Konstante und leitet nach y ab. Dafür schreibt man $\frac{\partial f}{\partial y}$ – siehe später.

Beweisskizze:
Ein gut lesbarer vollständiger Beweis findet sich z.B. in Burg, Haf und Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure, Band III, B.G. Teubner, Stuttgart, 1993, S. 17ff.

(i) Schreibe AWP als Integralgleichung.

(ii) Definiere eine Folge von Näherungen $y_n(x)$ für die gesuchte Funktion $y(x)$.

(iii) Zeige, dass die Folge wohldefiniert ist.

(iv) Zeige, dass die Folge gegen das gesuchte $y(x)$ konvergiert.

(v) Zeige die Eindeutigkeit der gefundenen Lösung.

ad (i):

$$y' = f(x,y)\,, \quad y(x_0) = y_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t\,, \tag{9.79}$$

denn "$\Rightarrow$"

$$y(x) - y_0 \underset{\text{Anfangswert}}{=} y(x) - y(x_0) \underset{\text{Hauptsatz}}{=} \int_{x_0}^{x} y'(t)\,\mathrm{d}t \underset{\text{DGL}}{=} \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \tag{9.80}$$

und "$\Leftarrow$"

$$\begin{aligned} y'(x) &\underset{\text{Integralgln.}}{=} 0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \underset{\text{Diff. nach oberer Grenze}}{=} f(x, y(x))\,, \\ y(x_0) &\underset{\text{Integralgln.}}{=} y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t)) = y_0\,. \end{aligned} \tag{9.81}$$

ad (ii): Picard-Iteration

$$\begin{aligned} y_0(x) &:= y_0 \quad \text{(also konstant)} \\ y_1(x) &:= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,\mathrm{d}t \\ &\vdots \\ y_n(x) &:= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{9.82}$$

ad (iii):
z.z.: $y_n(x)$ bleibt im Definitionsbereich von f falls $x \in U_h(x_0)$, d.h.

$$|y_n(x) - y_0| \leq b \quad \forall\ |x - x_0| < h.$$

Vollständige Induktion:
$n = 0$:

$$|y_0(x) - y_0| = 0 \leq b$$

$n \to n+1$:

$$|y_{n+1}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, \mathrm{d}t \right| \underset{\text{I.V.}}{\leq} M|x - x_0| < Mh \leq b \qquad \square$$

ad (iv) & (v)

- Zeige, dass die Folge konvergiert – ähnliche Abschätzungen wie zu (iii) nur etwas aufwändiger, hier geht Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial y}$ ein.
- So wie die Folge definiert war, muss sie dann gegen eine Lösung des AWPs konvergieren!
- Zeige Eindeutigkeit – wieder ähnliche Abschätzungen, verwende dabei nochmals Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Beispiel: AWP $y' + \pi y = 0$, $y(0) = 42$

- berechne Picard-Iterierte y_0, y_1, y_2, y_3
- rate Formel für y_n und beweise mit vollständiger Induktion
- bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ und vergleiche mit Lösung nach Abschnitt 9.1 oder 9.2.