Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 20/21

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Klausur am 27.02.2021

- Drucken Sie die Klausur aus (einseitig).
- Tragen Sie im Abschnitt *Erklärung* Vorname, Name und Matrikelnummer ein.
- Wenn Sie keinen Drucker benutzen können oder möchten, dann schreiben Sie den Abschnitt *Erklärung* ab, und schreiben Sie die Aufgabenstellungen (oder zumindest die Formeln daraus) ab – jede Aufgabe auf eine eigene Seite!
- Tragen Sie bei *Beginn* die aktuelle Uhrzeit ein.
- Bearbeiten Sie die Klausur. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- Beenden Sie nach spätestens 120 Minuten die Bearbeitung.
  Tragen Sie bei *Ende* die aktuelle Uhrzeit ein.
- Unterschreiben Sie den Abschnitt *Erklärung*.
- Scannen Sie die Erklärung. Scannen Sie Ihre Lösungen – je ein Dokument pro Aufgabe, auch unbearbeitete Aufgaben!
- Laden Sie die Erklärung wie angegeben hoch. Laden Sie Ihre Lösungen wie angegeben hoch – auch unbearbeitete Aufgaben!

Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.

Es sind maximal 109 Punkte erreichbar, 88 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 44 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Einziges erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).

Viel Erfolg!

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 20**

Erklärung

Vorname: ______________________ Name: ______________________________

Matrikelnummer: ____________________

Beginn: __________________ Ende: __________________

Ich bestätige, dass ich diese Klausur ohne fremde Hilfe und ohne unerlaubte Hilfsmittel bearbeitet habe.

Datum, Unterschrift: ____

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 21**

Aufgabe 1 (2+4 = 6 Punkte)

Sei $a_0 = \frac{3}{2}$ und für $n \geq 0$ sei $a_{n+1} = 3a_n - 2n$

a) Berechnen Sie a_1 und a_2.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $a_n = 3^n + n + \frac{1}{2}\ \forall\, n \geq 0$.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 22**

Aufgabe 2 (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7x^7 - 3x^2 + 5x}{4x^7 + 6x^3 - 2x}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{7x^7 - 3x^2 + 5x}{4x^7 + 6x^3 - 2x}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^6 - 64}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 2x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\mathrm{e}^x - 1)^3(\sin x - x)}{(1 - \cos x)^3}$

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 23**

Aufgabe 3 (4+4+4+4 = 16 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{10} 2^{n+2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log 5)^n}{n!}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{22} \binom{21}{n-1} 2^n$

d) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{10} \sum_{\mu=\nu}^{10} \frac{5^\mu}{\mu+1}$

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 24**

Aufgabe 4 (3+3+3+3 = 12 Punkte)

Sei $f(x) = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ und $g(x) = \int_0^{\cos x} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$. Berechnen Sie:

a) $f'(x)$

b) $g'(x)$

c) $\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$

d) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 25**

Aufgabe 5 (3+4 = 7 Punkte)

a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von $\dfrac{3+4\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}$.

b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ für die gilt $z^3 = \mathrm{i}$.
Zeichnen Sie diese z in einem Diagramm der komplexen Ebene ein.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 26**

Aufgabe 6 (4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen um x_0, und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

a) $\dfrac{1}{1000 - x^3}$ um $x_0 = 0$

b) $\dfrac{\cos(x^2)}{1 - x^4}$ um $x_0 = 0$

c) $\dfrac{1}{x}$ um $x_0 = 2$

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 27**

Aufgabe 7 (1+3+1+2+3+3+4 = 17 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + x(|x| + 2) + 2}{2|x|}\,.$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ definiert?

b) Bestimmen Sie alle Asymptoten von f.

c) Bestimmen Sie alle Nullstellen.

d) Berechnen Sie $f'(x)$.

e) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte.

f) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.

g) Geben Sie möglichst große Intervalle $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $-\frac{1}{2} \in B$ an, so dass $f : A \to B$ bijektiv ist. Sei $f^{-1} : B \to A$ die Umkehrfunktion von f. Bestimmen Sie ${f^{-1}}'(0)$.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 28**

Aufgabe 8 (3+5 = 8 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $A^T A$.
b) Bestimmen Sie A^{-1}.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 29**

Aufgabe 9 (4+4 = 8 Punkte)

Sei $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\det A$.

b) Bestimmen Sie alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^5$, die $A\vec{x} = \vec{b}$ erfüllen.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 30**

Aufgabe 10 (8 Punkte)

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sei definiert durch $L(\vec{x}) = \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle \vec{a}$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$ ist. Bestimmen Sie die Dimensionen der Unterräume

$$U_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid L(\vec{x}) = \vec{0}\} \qquad \text{und} \qquad U_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \exists \vec{y} \in \mathbb{R}^4 \text{ mit } L(\vec{y}) = \vec{x}\},$$

und geben Sie jeweils eine Basis an.